19. L'argomento che segue è un esempio di:

a) Sillogismo statistico
b) Generalizzazione statistica
c) Generalizzazione induttiva

P_1) L'80 per cento dei 2500 italiani intervistati a caso si è dichiarata d'accordo con la nuova legge contro il fumo nei locali pubblici.

C) Approssimativamente l'80 per cento degli italiani è d'accordo con questa legge.

20. L'argomento che segue è un esempio di:

a) Sillogismo Statistico
b) Analogia
c) Generalizzazione Induttiva

P_1) Un moscerino comune x lungo 8 mm e vecchio di quattordici giorni viene ora chiuso in un barattolo.

P_2) Un moscerino comune y lungo 8 mm e vecchio di quattordici giorni era già stato chiuso in un barattolo.

P_3) y è morto dopo un giorno.

C) x morirà dopo un giorno.

21. Che tipo di fallacia logica esemplifica l'argomento seguente?

a) Affermazione del conseguente
b) Fallacia di composizione
c) Negazione dell'antecedente

P_1) Se i tassi di mutuo aumentano, i prezzi delle case diminuiscono.

P_2) I tassi di mutuo non aumenteranno.

C) I prezzi delle case non diminuiranno.

22. Che tipo di fallacia logica esemplifica l'argomento seguente?

a) Affermazione del conseguente
b) Fallacia di composizione
c) Negazione dell'antecedente

P_1) Chi dorme non piglia pesci.

P_2) Non piglio pesci.

C) Dormo.

23. Che tipo di fallacia logica esemplifica l'argomento seguente?

a) Affermazione del conseguente
b) Fallacia di composizione
c) Generalizzazione indebita

P_1) Il 75% di 5000 italiani intervistati all'uscita dalla messa domenicale crede all'esistenza di Dio.

C) Il 75% degli italiani crede all'esistenza di Dio.

24. Che tipo di fallacia logica esemplifica l'argomento seguente?

 a) Fallacia *ad ignorantiam*
 b) Fallacia di composizione
 c) Generalizzazione indebita

P_1) Non ci sono prove a supporto dell'inesistenza di Dio.

C) Dio esiste

25. Che tipo di fallacia logica esemplifica l'argomento seguente?

 a) Fallacia *ad ignorantiam*
 b) Fallacia del *base rate*
 c) Generalizzazione indebita

P_1) Quasi tutti i mafiosi hanno la fedina penale sporca.

P_2) Pochi non mafiosi hanno la fedina penale sporca.

P_3) Anna ha la fedina penale sporca.

C) (Probabilmente) Anna è una mafiosa.

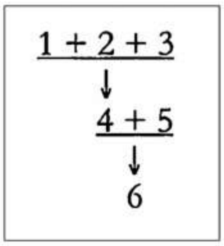
26. Che tipo di fallacia logica esemplifica l'argomento seguente?

 a) Fallacia *ad ignorantiam*
 b) Fallacia del *base rate*
 c) *Petitio Principii*

La pena di morte è giustificata. Infatti il nostro paese è pieno di criminali che commettono orribili atti di omicidio e rapimento, ed è perfettamente legittimo punire con la morte questi esseri inumani.

Soluzione:

1. a
2. b
3. c
4. c
5. a
6. b
7. a, b
8. 1 = «Un assegno scade se non è incassato entro trenta giorni». 2 = «La data su quest'assegno è il 2 maggio». 3 = «Oggi è l'8 giugno». 4 = «L'assegno è scaduto». 4 = «Puoi incassare un assegno solo se non è scaduto». 5 = «Questo non puoi incassarlo». Di seguito il diagramma dell'argomento:



9. a
10. b
11. b
12. b
13. a
14. b
15. b
16. a
17. b
18. a
19. b

20. b
21. c
22. a
23. c
24. a
25. b
26. c

Capitolo 2

Logica proposizionale

2.1 Sintassi

Esercizio 1

Individuare fra quelle che seguono le formule ben formate (ffbf) usando le regole di formazione e motivare le risposte per mezzo di una dimostrazione (induttiva).

1. A
2. $(A$
3. (A)
4. $(\neg A)$
5. $(A \to B)$
6. $A \to ($
7. $(A \to (B \wedge C)$
8. $((P \wedge Q) \to R)$
9. $\neg(A \to B)$
10. $\neg A \to B$
11. $(A \wedge B \wedge C)$
12. $A \vee (B \wedge C \vee D)))$

13. $P\neg \to W)$

14. $((P) \to (Q))$

15. $\neg(P \leftrightarrow (Q \wedge R))$

16. $(\neg(Q \wedge \neg(B)) \vee (D \leftrightarrow (G \vee B)))$

17. $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg P$

18. $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg P \to Q$

Soluzione:

Richiamiamo le regole di formazione (la grammatica o sintassi) del linguaggio della logica proposizionale:

1. Qualunque lettera enunciativa appartenente all'insieme At[1] definito dal vocabolario del linguaggio proposizionale è una fbf.
2. Se ϕ è una fbf, allora anche $\neg\phi$ è una fbf.
3. Se ϕ e ψ sono ffbf, allora lo sono anche $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$.
4. (condizione di chiusura) Nessun'altra stringa di simboli è una fbf.

(Riportiamo in blu le formule che sono ffbf, e in rosso quelle che non sono ffbf.)

1. A

   È una fbf per la regola (1).

2. $(A$

   Non è una fbf. Non è ottenibile con le prime tre regole di formazione. Infatti, per (3) le parentesi vanno sempre introdotte in coppia (aperta, chiusa) e nel solo caso di operatori binari. Allora, per (4) non è una fbf.

3. (A)

   Non è una fbf. Non è ottenibile con le prime tre regole di formazione. Infatti, nessuna regola stabilisce che se ϕ è una fbf, allora (ϕ) è una fbf. Allora, per (4) non è una fbf.

4. $(\neg A)$

   Non è una fbf. Non è ottenibile con le prime tre regole di formazione. Infatti, nessuna regola stabilisce che se ϕ è una fbf, allora (ϕ) è una fbf. Allora, per (4) non è una fbf.

[1] L'insieme delle formule atomiche.

5. $(A \to B)$

   A e B sono ffbf per (1). Quindi, per (3) la formula è una fbf.

6. $A \to ($

   Non è una fbf. Non è ottenibile con le prime tre regole di formazione. Dunque, per (4) non è una fbf.

7. $(A \to (B \wedge C)$

   Non è una fbf. La regola (3) richiede una seconda parentesi chiusa a conclusione della stringa e quindi non è rispettata. Per (4) segue che la formula non è una fbf.

8. $((P \wedge Q) \to R)$

   È una fbf. P, Q e R sono ffbf per (1). Allora, per (3) anche $(P \wedge Q)$ è una fbf. Allora, sempre per (3), anche $((P \wedge Q) \to R)$ è una fbf.

9. $\neg(A \to B)$

   È una fbf. Infatti, A e B sono ffbf per (1). Allora, $(A \to B)$ è una fbf per (3). Allora, $\neg(A \to B)$ è una fbf per (2).

10. $\neg A \to B$

    Non è una fbf. La regola (3) non è rispettata, perché richiede le parentesi per il connettivo $\to$. Quindi, non è una fbf per (4).

11. $(A \wedge B \wedge C)$

    Non è una fbf. La regola (3) non è rispettata poiché è necessaria una coppia di parentesi per ciascun connettivo binario presente. Dunque, per (4) non è una fbf.

12. $A \vee (B \wedge C \vee D)))$

    Non è una fbf. La regola (3) non è rispettata poiché è necessaria una coppia di parentesi per ciascun connettivo binario presente. Dunque, per (4) non è una fbf.

13. $P\neg \to W)$

    Non è una fbf. (2) non è rispettata, siccome $\neg$ dovrebbe essere sempre seguito da una lettera enunciativa. Inoltre, nemmeno (3) è rispettata, siccome il connettivo $\to$ necessita di una coppia di parentesi.

14. $((P) \to (Q))$

    Non è una fbf. Nessuna regola richiede che le lettere enunciative siano racchiuse in una coppia di parentesi. Dunque, per (4) non è una fbf.

15. $\neg(P \leftrightarrow (Q \wedge R))$

    È una fbf. Infatti, P, Q e R sono ffbf per (1). Allora, $(Q \wedge R)$ è una fbf per (3). Allora, $(P \leftrightarrow (Q \wedge R))$ è una fbf per (3). Allora, $\neg(P \leftrightarrow (Q \wedge R))$ è una fbf per (2).

16. $(\neg(Q \wedge \neg(B)) \vee (D \leftrightarrow (G \vee B)))$

    Non è una fbf. Infatti, nella stringa occorre (B) e nessuna regola richiede che le lettere enunciative siano racchiuse in una coppia di parentesi. Dunque, per (4) non è una fbf.

17. $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg P$

    È una fbf. P è una fbf per (1). Allora, $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg P$ è una fbf in seguito all'applicazione di (2) per nove volte.

18. $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg P \to Q$

    Non è una fbf. La regola (3) non è rispettata perché mancano le parentesi richieste da $\to$.

Esercizio 2

Isolate l'ambito di applicazione delle occorrenze dei connettivi nelle ffbf dell'esercizio precedente.

Soluzione:

- A: non ci sono connettivi.

- $(A \to B)$:

Connettivo	Ambito
$(A \to B)$	$(A \to B)$

- $((P \wedge Q) \to R)$:

Connettivo	Ambito
$((P \wedge Q) \to R)$	$(P \wedge Q)$
$((P \wedge Q) \to R)$	$((P \wedge Q) \to R)$

- $((P \wedge Q) \to R)$:

Connettivo	Ambito
$((P \textcolor{red}{\wedge} Q) \to R)$	$(P \wedge Q)$
$((P \wedge Q) \textcolor{red}{\to} R)$	$((P \wedge Q) \to R)$

- $\neg(A \to B)$:

Connettivo	Ambito
$\neg(A \textcolor{red}{\to} B)$	$(A \to B)$
$\textcolor{red}{\neg}(A \to B)$	$\neg(A \to B)$

- $\neg(P \leftrightarrow (Q \wedge R))$:

Connettivo	Ambito
$\neg(P \leftrightarrow (Q \textcolor{red}{\wedge} R))$	$(Q \wedge R)$
$\neg(P \textcolor{red}{\leftrightarrow} (Q \wedge R))$	$(P \leftrightarrow (Q \wedge R))$
$\textcolor{red}{\neg}(P \leftrightarrow (Q \wedge R))$	$\neg(P \leftrightarrow (Q \wedge R))$

- $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg P$:

Connettivo	Ambito
$\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\textcolor{red}{\neg} P$	$\neg P$
$\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\textcolor{red}{\neg}\neg P$	$\neg\neg P$
$\neg\neg\neg\neg\neg\neg\textcolor{red}{\neg}\neg\neg P$	$\neg\neg\neg P$
$\neg\neg\neg\neg\neg\textcolor{red}{\neg}\neg\neg\neg P$	$\neg\neg\neg\neg P$
$\neg\neg\neg\neg\textcolor{red}{\neg}\neg\neg\neg\neg P$	$\neg\neg\neg\neg\neg P$
$\neg\neg\neg\textcolor{red}{\neg}\neg\neg\neg\neg\neg P$	$\neg\neg\neg\neg\neg\neg P$
$\neg\neg\textcolor{red}{\neg}\neg\neg\neg\neg\neg\neg P$	$\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg P$
$\neg\textcolor{red}{\neg}\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg P$	$\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg P$
$\textcolor{red}{\neg}\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg P$	$\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg P$

Esercizio 3

Nelle ffbf che seguono indicare l'ambito di applicazione di ciascun connettivo e dire se si tratta di un connettivo principale o subordinato.

1. $((P \wedge \neg Q) \to \neg(\neg P \wedge \neg Q))$

2. $((P \vee Q) \rightarrow Q)$

3. $(P \vee (Q \rightarrow P))$

4. $(((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow P)$

5. $((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow (P \vee \neg P)))$

6. $\neg((P \wedge Q) \rightarrow \neg R)$

<u>Soluzione</u>:

Il connettivo principale è quello evidenziato (in giallo). Per individuarlo si ricordi che il connettivo principale di una fbf è quello il cui ambito coincide con la stessa fbf. Tutti i rimanenti connettivi che occorrono nella fbf sono subordinati.

1. $((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q))$

Connettivo	Ambito
$((P{\color{red}\wedge}\neg Q) \rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q))$	$(P \wedge \neg Q)$
$((P \wedge {\color{red}\neg} Q) \rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q))$	$\neg Q$
$((P \wedge \neg Q){\color{red}\rightarrow}\neg(\neg P \wedge \neg Q))$	$((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q))$
$((P \wedge \neg Q) \rightarrow {\color{red}\neg}(\neg P \wedge \neg Q))$	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
$((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg({\color{red}\neg} P \wedge \neg Q))$	$\neg P$
$((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(\neg P{\color{red}\wedge}\neg Q))$	$(\neg P \wedge \neg Q)$
$((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(\neg P \wedge {\color{red}\neg} Q))$	$\neg Q$

2. $((P \vee Q) \rightarrow Q)$

Connettivo	Ambito
$((P{\color{red}\vee}Q) \rightarrow Q)$	$(P \vee Q)$
$((P \vee Q) {\color{red}\rightarrow} Q)$	$((P \vee Q) \rightarrow Q)$

3. $(P \vee (Q \rightarrow P))$

Connettivo	Ambito
$(P {\color{red}\vee} (Q \rightarrow P))$	$(P \vee (Q \rightarrow P))$
$(P \vee (Q{\color{red}\rightarrow}P))$	$(Q \rightarrow P)$

4. $(((P \to Q) \wedge P) \boxed{\to} P)$

Connettivo	Ambito
$(((P \to Q) \wedge P) \to P)$	$(P \to Q)$
$(((P \to Q) \wedge P) \to P)$	$((P \to Q) \wedge P)$
$(((P \to Q) \wedge P) \to P)$	$(((P \to Q) \wedge P) \to P)$

5. $((P \vee Q) \boxed{\wedge} (P \to (P \vee \neg P)))$

Connettivo	Ambito
$((P \vee Q) \wedge (P \to (P \vee \neg P)))$	$(P \vee Q)$
$((P \vee Q) \wedge (P \to (P \vee \neg P)))$	$((P \vee Q) \wedge (P \to (P \vee \neg P)))$
$((P \vee Q) \wedge (P \to (P \vee \neg P)))$	$(P \to (P \vee \neg P))$
$((P \vee Q) \wedge (P \to (P \vee \neg P)))$	$(P \vee \neg P)$
$((P \vee Q) \wedge (P \to (P \vee \neg P)))$	$\neg P$

6. $\boxed{\neg} ((P \wedge Q) \to \neg R)$

Connettivo	Ambito
$\neg((P \wedge Q) \to \neg R)$	$\neg((P \wedge Q) \to \neg R)$
$\neg((P \wedge Q) \to \neg R)$	$(P \wedge Q)$
$\neg((P \wedge Q) \to \neg R)$	$((P \wedge Q) \to \neg R)$
$\neg((P \wedge Q) \to \neg R)$	$\neg R$

Esercizio 4

Modificare le formule dell'esercizio precedente secondo le convenzioni per eliminare le parentesi.

<u>Soluzione</u>:

Richiamiamo le convenzioni sulle parentesi:

1. se il primo e l'ultimo simbolo di una fbf sono parentesi (in questo caso si parla di "parentesi esterne"), queste possono essere omesse;

2. possono essere omesse anche alcune delle parentesi interne, tenendo conto della seguente gerarchia dei connettivi logici:

   a) $\neg$ è il connettivo che lega più strettamente di tutti;
   b) $\wedge$ e $\vee$ legano più strettamente di $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$;
   c) $\rightarrow$ lega più strettamente di $\leftrightarrow$.

Tenendo conto di queste convenzioni, risulta che:

1. $((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q))$ diventa $P \wedge \neg Q \rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
2. $((P \vee Q) \rightarrow Q)$ diventa $P \vee Q \rightarrow Q$
3. $(P \vee (Q \rightarrow P))$ diventa $P \vee (Q \rightarrow P)$
4. $(((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow P)$ diventa $(P \rightarrow Q) \wedge P \rightarrow P$
5. $((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow (P \vee \neg P)))$ diventa $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow P \vee \neg P)$
6. $\neg((P \wedge Q) \rightarrow \neg R)$ diventa $\neg(P \wedge Q \rightarrow \neg R)$

2.2 Semantica

Esercizio 5

Indicare se le seguenti proposizioni sono vere o false:

1. $45 \in \{x : x$ è un numero naturale minore di $37\}$
2. Roma $\in \{x : x$ è una capitale europea$\}$
3. $\{Roma, Atene, Berlino\} \in \{x : x$ è una capitale europea$\}$
4. $\{x : x$ è un numero dispari$\} \in \{x : x$ è un numero naturale$\}$
5. $\{0, 1, 2\} \in \{x : x$ è un numero naturale minore di $3\}$

Soluzione:

1. $45 \in \{x : x$ è un numero naturale minore di $37\}$

   È falsa. 45 non soddisfa la proprietà con cui viene generato l'insieme, non essendo minore di 37.

2. Roma $\in \{x : x$ è una capitale europea$\}$

   È vera.

3. $\{Roma, Atene, Berlino\} \in \{x : x$ è una capitale europea$\}$

   È falsa. $\{Roma, Atene, Berlino\}$ è un insieme, e un insieme non è una capitale europea.

4. $\{x : x$ è un numero dispari$\} \in \{x : x$ è un numero naturale$\}$

   È falsa. L'insieme dei numeri dispari non è un numero naturale e, dunque, non appartiene all'insieme dei numeri naturali. Si noti che se al posto della relazione di appartenenza ci fosse stata quella di inclusione insiemistica, la proposizione sarebbe stata vera.

5. $\{0, 1, 2\} \in \{x : x$ è un numero naturale minore di $3\}$

   È falsa. L'insieme $\{0, 1, 2\}$ non è un numero naturale minore di 3.

Esercizio 6

Per ognuno degli insiemi presentati, indica se si tratta di una *funzione*, o solo di una *relazione*.

1. $\{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle d, e\rangle, \langle f, e\rangle\}$

2. $\{\langle a, e\rangle, \langle b, g\rangle, \langle c, g\rangle, \langle h, i\rangle\}$

3. $\{\langle$Ciccio, Franco$\rangle$, $\langle$don Camillo, Peppone$\rangle$, $\langle$Bud, Terence$\rangle$, $\langle$Ale, Franz$\rangle$, $\langle$Troisi, Benigni$\rangle\}$

4. $\{\langle x, y\rangle \mid x$ è la mamma di $y\}$

5. $\{\langle x, y\rangle \mid x \text{ è il figlio di } y\}$

6. $\{\langle x, y\rangle \mid x \text{ è il capoluogo di regione di } y\}$

7. $\{\langle x, y\rangle \mid x \text{ è professore del corso di } y\}$

Soluzione:

1. $\{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle d, e\rangle, \langle f, e\rangle\}$

   È una relazione. Non è una funzione siccome l'elemento "a" del dominio è in relazione con più di un elemento del codominio.

2. $\{\langle a, e\rangle, \langle b, g\rangle, \langle c, g\rangle, \langle h, i\rangle\}$

   È una funzione.

3. {⟨Ciccio, Franco⟩, ⟨don Camillo, Peppone⟩, ⟨Bud, Terence⟩, ⟨Ale, Franz⟩, ⟨Troisi, Benigni⟩}

   È una funzione.

4. $\{\langle x, y\rangle \mid x \text{ è la mamma di } y\}$

   È una relazione, in quanto insieme di coppie ordinate. Non è una funzione perché esistono x che sono mamme di più y distinti.

5. $\{\langle x, y\rangle \mid x \text{ è il figlio di } y\}$

   È una relazione. Non è una funzione, siccome x è figlio di due distinti y (la madre e il padre biologici).

6. $\{\langle x, y\rangle \mid x \text{ è il capoluogo di regione di } y\}$

   È una funzione, siccome ad ogni città che è capoluogo corrisponde al più una regione.

7. $\{\langle x, y\rangle \mid x \text{ è professore del corso di } y\}$

   È una relazione. Infatti, vi sono professori che tengono più di un corso universitario.

Esercizio 7

- Definire una funzione di verità a due argomenti che dia valore vero quando i due argomenti non hanno lo stesso valore, e valore falso altrimenti.

- Definire una funzione di verità a tre argomenti che dia valore vero quando il secondo argomento ha valore vero, e valore falso altrimenti.

<u>Soluzione</u>:

È possibile definire una funzione di verità o per mezzo delle tavole di verità, oppure tramite clausole semantiche. Utilizziamo questa seconda modalità, usando «$\triangle$» come simbolo per la funzione che definiamo.

- $c \vDash_1 (A \triangle B)$ sse $c \vDash_1 A$ e $c \vDash_0 B$, o $c \vDash_0 A$ e $c \vDash_1 B$. Si osservi che tale funzione di verità altro non è che la negazione del bicondizionale.

A	B	¬	(A	↔	B)
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T
F	F	F	F	T	F

- $c \vDash_1 \triangle(A, B, C)$ sse $c \vDash_1 B$. Ad esempio, la funzione di verità a tre argomenti potrebbe corrispondere a:

A	B	C	((A	∨	¬	A)	∧	B)	∧	(C	∨	¬	C)
T	T	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	F	T	T	T	T	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F	T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	F	T	T	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T	F	T	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	F	F	F	F	F	T	T	F

Esercizio 8

Fornire le tavole di verità delle seguenti ffbf.

1. $(A \vee \neg A) \vee (A \wedge \neg A)$
2. $\neg A \wedge \neg(C \wedge \neg B)$
3. $\neg(C \wedge \neg B)$
4. $\neg(A \wedge \neg(C \wedge \neg B))$
5. $\neg(A \vee \neg(C \vee \neg B))$
6. $A \wedge (C \wedge \neg B)$
7. $A \vee (B \wedge \neg A)$
8. $(A \vee B) \vee \neg(A \vee B)$
9. $A \vee \neg(\neg B \wedge C)$
10. $(A \wedge \neg B) \wedge \neg(C \vee \neg D)$
11. $A \wedge \neg(B \wedge \neg(C \vee \neg D))$
12. $(A \to (B \to C)) \to (D \to E)$
13. $(A \to B) \to (\neg A \to C)$
14. $((A \to B) \to B) \to B$
15. $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee \neg A)$
16. $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge \neg B)$

Soluzione:

Ricordiamo le tavole di verità dei connettivi logici:

A	¬	A
T	F	T
F	T	F

A	B	A	∧	B
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	F	F	F

A	B	A	∨	B
T	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	F

A	B	A	→	B
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	F

A	B	A	↔	B
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	F	T	F

Con le tavole dei connettivi logici procediamo a ricostruire le tavole delle ffbf dell'esercizio:

1. $(A \vee \neg A) \vee (A \wedge \neg A)$

A	(	A	∨	¬	A	)	∨	(	A	∧	¬	A	)
T		T	T	F	T		T		T	F	F	T	
F		F	T	T	F		T		F	F	T	F	

2. $\neg A \wedge \neg(C \wedge \neg B)$

A	B	C	¬	A	∧	¬	(	C	∧	¬	B	)
T	T	T	F	T	F	T		T	F	F	T	
T	T	F	F	T	F	T		F	F	F	T	
T	F	T	F	T	F	F		T	T	T	F	
T	F	F	F	T	F	T		F	F	T	F	
F	T	T	T	F	T	T		T	F	F	T	
F	T	F	T	F	T	T		F	F	F	T	
F	F	T	T	F	F	F		T	T	T	F	
F	F	F	T	F	T	T		F	F	T	F	

3. $\neg(C \wedge \neg B)$

B	C	$\neg$	(C	$\wedge$	$\neg$	B)
T	T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	T	F

4. $\neg(A \wedge \neg(C \wedge \neg B))$

A	B	C	$\neg$	(A	$\wedge$	$\neg$	(C	$\wedge$	$\neg$	B))
T	T	T	F	T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	F	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T	T	F	F	T	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F	T	F	F	T	F

5. $\neg(A \vee \neg(C \vee \neg B))$

A	B	C	$\neg$	(A	$\vee$	$\neg$	(C	$\vee$	$\neg$	B))
T	T	T	F	T	T	F	T	T	F	T
T	T	F	F	T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	F	T	T	F	T
F	T	F	F	F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F	F	F	T	T	F

6. $A \wedge (C \wedge \neg B)$

A	B	C	A	$\wedge$	(C	$\wedge$	$\neg$	B)
T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	F	F	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	F	F	T	F

7. $A \vee (B \wedge \neg A)$

A	B	A	∨	(	B	∧	¬	A	)
T	T	T	T		T	F	F	T	
T	F	T	T		F	F	F	T	
F	T	F	T		T	T	T	F	
F	F	F	F		F	F	T	F	

8. $(A \vee B) \vee \neg(A \vee B)$

A	B	(	A	∨	B	)	∨	¬	(	A	∨	B	)
T	T		T	T	T		T	F		T	T	T	
T	F		T	T	F		T	F		T	T	F	
F	T		F	T	T		T	F		F	T	T	
F	F		F	F	F		T	T		F	F	F	

9. $A \vee \neg(\neg B \wedge C)$

A	B	C	A	∨	¬	(	¬	B	∧	C	)
T	T	T	T	T	T		F	T	F	T	
T	T	F	T	T	T		F	T	F	F	
T	F	T	T	T	F		T	F	T	T	
T	F	F	T	T	T		T	F	F	F	
F	T	T	F	T	T		F	T	F	T	
F	T	F	F	T	T		F	T	F	F	
F	F	T	F	F	F		T	F	T	T	
F	F	F	F	T	T		T	F	F	F	

10. $(A \wedge \neg B) \wedge \neg(C \vee \neg D)$

A	B	C	D	(A	∧	¬	B)	∧	¬	(C	∨	¬	D)
T	T	T	T	T	F	F	T	F	F	T	T	F	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T	T	T	F
T	T	F	T	T	F	F	T	F	T	F	F	F	T
T	T	F	F	T	F	F	T	F	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	T	T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	T	T	T	F	F	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	T	F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	F	T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T	T	T	F
F	T	F	T	F	F	F	T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	T	F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	F	F	F	T	F	F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F	T	F	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F	F	T	T	F

11. $A \wedge \neg(B \wedge \neg(C \vee \neg D))$

A	B	C	D	A	∧	¬	(B	∧	¬	(C	∨	¬	D))
T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	T	T	F	T
T	T	T	F	T	T	T	T	F	F	T	T	T	F
T	T	F	T	T	F	F	T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	F	T	T	T	T	F	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	T	T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	T	T	T	F	F	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	T	F	F	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T	T	T	F
F	T	F	T	F	F	F	T	T	T	F	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T	T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	T	F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	F	F	F	T	F	F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F	T	F	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F	F	T	T	F

12. $(A \to (B \to C)) \to (D \to E)$

A	B	C	D	E	(A	→	(B	→	C))	→	(D	→	E)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T	T	T	T	T	F	T	F	F
T	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
T	T	T	F	F	T	T	T	T	T	T	F	T	F
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	T
T	T	F	F	F	T	F	T	F	F	T	F	T	F
T	F	T	T	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	F	T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T	T	F	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	T	T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F	T	F	T	F	T	F
F	T	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	T	T	T	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	F	T	T	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T	F	F	F	T	F	F
F	T	F	F	T	F	T	T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F	T	F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	F	T	F	T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F	T	F	T	F	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F

13. $(A \to B) \to (\neg A \to C)$

A	B	C	(A	→	B)	→	(¬	A	→	C)
T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	F	T	T	F
T	F	T	T	F	F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F

14. $((A \to B) \to B) \to B$

A	B	((A	→	B)	→	B)	→	B
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F	F	T	F

15. $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee \neg A)$

A	B	(A	∧	B)	↔	(A	∨	¬	A)
T	T	T	T	T	T	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F	F	T	T	F

16. $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge \neg B)$

A	B	(A	∧	B)	↔	(B	∧	¬	B)
T	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	F	F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T	F	F	T	F

Esercizio 9

Se A, B e C sono veri e D ed E sono falsi, qual è il valore di verità delle seguenti ffbf?

1. $(A \vee D) \to E$
2. $A \leftrightarrow (C \vee B)$
3. $(E \vee \neg D) \to \neg A) \to ((\neg A \wedge \neg B) \wedge ((C \wedge D) \wedge E)$
4. $(A \to (B \to C)) \to (D \to E)$
5. $(A \wedge (C \wedge \neg B)) \vee ((A \vee D) \to E)$
6. $\neg(C \wedge \neg B) \wedge ((A \vee D) \to E)$

Soluzione:

1. $(A \lor D) \to E$

A	D	E	(	A	$\lor$	D	)	$\to$	E
T	F	F		T	T	F		**F**	F

2. $A \leftrightarrow (C \lor B)$

A	B	C	A	$\leftrightarrow$	(	C	$\lor$	B	)
T	T	T	T	**T**		T	T	T	

3. $(E \lor \neg D) \to \neg A) \to ((\neg A \land \neg B) \land ((C \land D) \land E)$

A	B	C	D	E	((	E	$\lor$	$\neg$	D	)	$\to$	$\neg$	A	)	$\to$	((	$\neg$	A	$\land$	$\neg$	B	)	$\land$	((	C	$\land$	D	)	$\land$	E	))
T	T	T	F	F		F	T	T	F		F	F	T		**T**		F	T	F	F	T		F		T	F	F		F	F	

4. $(A \to (B \to C)) \to (D \to E)$

A	B	C	D	E	(	A	$\to$	(	B	$\to$	C	))	$\to$	(	D	$\to$	E	)
T	T	T	F	F		T	T		T	T	T		**T**		F	T	F	

5. $(A \land (C \land \neg B)) \lor ((A \lor D) \to E)$

A	B	C	D	E	(	A	$\land$	(	C	$\land$	$\neg$	B	))	$\lor$	((	A	$\lor$	D	)	$\to$	E	)
T	T	T	F	F		T	F		T	F	F	T		**F**		T	T	F		F	F	

6. $\neg(C \land \neg B) \land ((A \lor D) \to E)$

A	B	C	D	E	$\neg$	(	C	$\land$	$\neg$	B	)	$\land$	((	A	$\lor$	D	)	$\to$	E	)
T	T	T	F	F	T		T	F	F	T		**F**		T	T	F		F	F	

Esercizio 10

Calcolare la tavola di verità delle seguenti ffbf e stabilire quali sono tautologiche, quali contraddittorie e quali contingenti:

1. $P \to P$
2. $P \to \neg P$
3. $\neg(P \to P)$
4. $P \leftrightarrow \neg(P \vee Q)$
5. $\neg((P \to (Q \wedge R)) \to (P \to R))$
6. $A \vee (B \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$
7. $\neg(B \wedge (C \to (A \wedge C)))$
8. $(P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)$
9. $(P \wedge Q) \to (P \vee Q)$
10. $P \wedge (P \to (\neg P \wedge Q))$
11. $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge Q)$
12. $A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$ (prima legge di assorbimento)
13. $A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$ (seconda legge di assorbimento)
14. $A \to (\neg A \to B)$ (seconda legge di Scoto)
15. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ (prima legge di contrapposizione)
16. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (seconda legge di contrapposizione)
17. $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ (terza legge di contrapposizione)
18. $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ (quarta legge di contrapposizione)
19. $((A \to B) \to A) \to A$ (legge di Peirce)
20. $(A \to B) \leftrightarrow \neg A \vee B$ (legge di Filone Megarico)
21. $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (legge di Crisippo)
22. $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \to B) \to (A \to C))$ (legge di Frege)

Soluzione:

1. $P \to P$ è tautologica

P	P	→	P
T	T	T	T
F	F	T	F

2. $P \to \neg P$ è una contingenza

P	P	→	¬	P
T	T	F	F	T
F	F	T	T	F

3. $\neg(P \to P)$ è una contraddizione

P	¬	(P	→	P)
T	F	T	T	T
F	F	F	T	F

4. $P \leftrightarrow \neg(P \vee Q)$ è contingente

P	Q	P	↔	¬	(P	∨	Q)
T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F	F

5. $\neg((P \to (Q \wedge R)) \to (P \to R))$ è una contraddizione

P	Q	R	¬	((P	→	(Q	∧	R))	→	(P	→	R))
T	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	F	T	F	F	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T	F	F	F	T	F	T	F

6. $A \vee (B \wedge C) \rightarrow A \wedge (B \vee C)$ è una contingenza

A	B	C	(A	∨	(B	∧	C))	→	(A	∧	(B	∨	C))
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	F	T	T	T	T	T	F
T	F	T	T	T	F	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	F	F	T	T	F	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	F	F	F

7. $\neg(B \wedge (C \rightarrow (A \wedge C)))$ è una contingenza

A	B	C	¬	(B	∧	(C	→	(A	∧	C)))
T	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F	T	F	F	F	T
F	F	F	T	F	F	F	T	F	F	F

8. $(P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)$ è una tautologia

P	Q	R	(P	∨	Q)	∨	(¬	P	∨	R)
T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	T	F	T	F

9. $(P \wedge Q) \to (P \vee Q)$ è una tautologia

P	Q	(P	∧	Q)	→	(P	∨	Q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T	F
F	T	F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T	F	F	F

10. $P \wedge (P \to (\neg P \wedge Q))$ è una contraddizione

P	Q	P	∧	(P	→	(¬	P	∧	Q))
T	T	T	F	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T	T	F	F	F

11. $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge Q)$ è una contraddizione

P	Q	(P	∧	Q)	∧	(¬	P	∧	Q)
T	T	T	T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F

12. $A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$ (prima legge di assorbimento) è una tautologia

A	B	(A	∧	(A	∨	B))	↔	A
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	F	F	T	F

13. $A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$ (seconda legge di assorbimento) è una tautologia

A	B	(A	∨	(A	∧	B))	↔	A
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F	F	T	F

14. $A \to (\neg A \to B)$ (seconda legge di Scoto) è una tautologia

A	B	A	→	(¬	A	→	B)
T	T	T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	F	F

15. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ (prima legge di contrapposizione) è una tautologia

A	B	(¬	A	→	¬	B)	→	(B	→	A)
T	T	F	T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	T	F	T	F	T	F

16. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (seconda legge di contrapposizione) è una tautologia

A	B	(A	→	B)	→	(¬	B	→	¬	A)
T	T	T	T	T	T	F	T	T	F	T
T	F	T	F	F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	T	T	F	T	T	F

17. $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ (terza legge di contrapposizione) è una tautologia

A	B	(A	→	¬	B)	→	(B	→	¬	A)
T	T	T	F	F	T	T	T	F	F	T
T	F	T	T	T	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	F	T	T	T	T	T	F
F	F	F	T	T	F	T	F	T	T	F

18. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ (quarta legge di contrapposizione) è una tautologia

A	B	($\neg$	A	$\rightarrow$	B)	$\rightarrow$	($\neg$	B	$\rightarrow$	A)
T	T	F	T	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T	F	F	F

19. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (legge di Peirce) è una tautologia

A	B	((A	$\rightarrow$	B)	$\rightarrow$	A)	$\rightarrow$	A
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	T	F
F	F	F	T	F	F	F	T	F

20. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$ (legge di Filone Megarico) è una tautologia

A	B	(A	$\rightarrow$	B)	$\leftrightarrow$	($\neg$	A	$\vee$	B)
T	T	T	T	T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T	T	F	T	F

21. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (legge di Crisippo) è una tautologia

A	B	(A	$\rightarrow$	B)	$\leftrightarrow$	$\neg$	(A	$\wedge$	$\neg$	B)
T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T	T	T	F
F	T	F	T	T	T	T	F	F	F	T
F	F	F	T	F	T	T	F	F	T	F

22. $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \to B) \to (A \to C))$ (legge di Frege) è una tautologia

A	B	C	(A	→	(B	→	C))	↔	((A	→	B)	→	(A	→	C))
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	F	T	T	T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T	T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

Esercizio 11

Quando le seguenti ffbf sono vere? Dare la semantica.

1. $P \to P$
2. $P \to \neg P$
3. $\neg(P \to P)$
4. $P \leftrightarrow \neg(P \vee Q)$
5. $\neg((P \to (Q \wedge R)) \to (P \to R))$
6. $A \vee (B \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$
7. $\neg(B \wedge (C \to (A \wedge C)))$
8. $(P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)$
9. $(P \wedge Q) \to (P \vee Q)$
10. $P \wedge (P \to (\neg P \wedge Q))$
11. $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge Q)$
12. $(A \to (B \to C)) \to (D \to E)$
13. $(A \to B) \to (\neg A \to C)$
14. $((A \to B) \to B) \to B$
15. $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee \neg A)$
16. $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge \neg B)$
17. $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \to B) \to (A \to C))$

Soluzione:

Di tutte le ffbf di questo esercizio sono state precedentemente date le tavole di verità. Dunque, data la tavola di verità di ciascuna fbf, basta verificare per quali assegnazioni delle formule atomiche la fbf diventa vera.

Esercizio 12

Valutare le seguenti ffbf:

1. $((A \wedge B) \to (C \vee \neg C))$
2. $\neg\neg(A \to B)$

Soluzione:

1. $((A \wedge B) \to (C \vee \neg C))$

   $v \vDash_1 ((A \wedge B) \to (C \vee \neg C))$ sse $v \vDash_0 (A \wedge B)$ o $v \vDash_1 (C \vee \neg C)$;

   $v \vDash_0 (A \wedge B)$ sse $v \vDash_0 A$ o $v \vDash_0 B$;

   $v \vDash_1 (C \vee \neg C)$ sse $v \vDash_1 C$ o $v \vDash_1 \neg C$;

   $v \vDash_1 \neg C$ sse $v \vDash_0 C$;

   Quindi, $v \vDash_1 ((A \wedge B) \to (C \vee \neg C))$ sse o $v \vDash_0 C$ o $v \vDash_1 C$ o $v \vDash_0 A$ o $v \vDash_0 B$.

   Siccome vale il principio del terzo escluso, i casi $v \vDash_0 C$ o $v \vDash_1 C$ coprono tutti quelli possibili. Dunque, la formula di partenza è una tautologia.

   Forniamo anche la tavola di verità:

A	B	C	(A	∧	B)	→	(C	∨	¬	C)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T	F	T	T	F
T	F	T	T	F	F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	F	F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	F	F	F	T	F	T	T	F

2. $\neg\neg(A \to B)$

   $v \vDash_1 \neg\neg(A \to B)$ sse $v \vDash_0 \neg(A \to B)$;

   $v \vDash_0 \neg(A \to B)$ sse $v \vDash_1 (A \to B)$;

   $v \vDash_1 (A \to B)$ sse $v \vDash_0 A$ o $v \vDash_1 B$;

   Quindi, $v \vDash_1 \neg\neg(A \to B)$ sse $v \vDash_0 A$ o $v \vDash_1 B$.

   Forniamo anche la tavola di verità:

A	B	¬	¬	(A	→	B)
T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	T	F

Esercizio 13

Considerate il seguente enunciato:

> "Sono ammesse al concorso le persone che sono laureate e che hanno meno di 30 anni o hanno figli".

Aldo non è laureato, ha ventisei anni e un figlio. Paolo è laureato, ha 40 anni e due figli. Vincenzo ha 32 anni e non ha figli. Chi può partecipare al concorso?

Soluzione:

Si noti che l'enunciato è ambiguo. Esso consente due interpretazioni.

PRIMA INTERPRETAZIONE. La condizione sufficiente per essere ammessi al concorso è la disgiunzione di due sotto-condizioni: la prima sotto-condizione è che la persona sia laureata e abbia meno di 30 anni; la seconda sotto-condizione è che la persona abbia figli. Allora, per essere ammessi al concorso, basta soddisfare almeno una di queste due sotto-condizioni.

SECONDA INTERPRETAZIONE. La condizione sufficiente per essere ammessi al concorso è la congiunzione di due sotto-condizioni, diverse da quelle di prima: la prima sotto-condizione è che la persona sia laureata; la seconda sotto-condizione è che la persona abbia meno di 30 anni oppure abbia figli. Allora, per essere ammessi al concorso, bisogna soddisfare tutte e due queste sotto-condizioni.

In pratica, le due interpretazioni si ottengono a seconda che si subordini il connettivo «e» al connettivo «o», o viceversa. Optiamo per la prima interpretazione.

Aldo, non essendo laureato, non soddisfa la prima sotto-condizione. Però, avendo un figlio, soddisfa la seconda. Dunque, può partecipare al concorso.

Paolo, avendo 40 anni non soddisfa la prima sotto-condizione. Però soddisfa la seconda, perché ha due figli. Quindi è ammesso al concorso.

Vincenzo, invece, non soddisfa né la prima né la seconda condizione. Quindi non può partecipare al concorso.

Si noti come, optando per la seconda interpretazione, la soluzione cambi: Aldo e Vincenzo non possono partecipare al concorso, mentre Paolo può.

Esercizio 14

Una norma del codice della strada stabilisce che:

Se si parcheggia in curva, allora si viene multati.

Considerare i seguenti casi:

1. Paolo ha parcheggiato in curva ed è stato multato.

2. Paolo non ha parcheggiato in curva ed è stato multato.

3. Paolo ha parcheggiato in curva e non è stato multato.

4. Paolo non ha parcheggiato in curva e non è stato multato.

In quale dei casi in questione è stata violata la norma?

Soluzione

La norma è un caso di enunciato condizionale, che viene formalmente reso con l'implicazione materiale. Per trovare i casi in cui la norma viene violata, cioè resa falsa, basta ricordare quali sono le assegnazioni dell'antecedente e del conseguente che rendono l'implicazione falsa. Richiamando la sua tavola di verità (la semantica), l'implicazione materiale è falsa solo quando l'antecedente è vero e il conseguente è falso. Dunque, la norma risulta violata dall'enunciato 3, «Paolo ha parcheggiato in curva e non è stato multato». La verità dell'enunciato 3 implica la falsità della norma.

Esercizio 15

Per ciascuno dei seguenti enunciati trovare un enunciato equivalente.

1. $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

2. $(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

3. $(\neg B \vee (A \wedge B)) \wedge (A \vee (\neg A \wedge B))$

4. $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

5. $\neg((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C))$

6. $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$

Soluzione:

In linea di principio, vi sono diversi modi per risolvere questo esercizio, e, in generale, gli esercizi che hanno a che fare con le equivalenze logiche. Ad esempio, per verificare se due ffbf del linguaggio proposizionale sono logicamente equivalenti si può (1) fare uso delle tavole di verità, (2) si può mostrare che sono interderivabili ($\dashv\vdash$) utilizzando, ad esempio, il calcolo della deduzione naturale, oppure (3) si può cercare di ottenerne una partendo dall'altra utilizzando le equivalenze logiche di base:

Double Negation	$\neg\neg A \equiv A$
Idempotence	$A \wedge A \equiv A$ $A \vee A \equiv A$
Commutativity	$A \wedge B \equiv B \wedge A$ $A \vee B \equiv B \vee A$
Associativity	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
Distributivity	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
De Morgan's Laws	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

e da altre equivalenze logiche come:

Contradictory Conjunct	$A \wedge (B \wedge \neg B) \equiv B \wedge \neg B$
Contradictory Disjunct	$A \vee (B \wedge \neg B) \equiv A$
Tautological Conjunct	$A \wedge (B \vee \neg B) \equiv A$
Tautological Disjunct	$A \vee (B \vee \neg B) \equiv B \vee \neg B$

In questo esercizio utilizzeremo proprio queste equivalenze logiche di base per ottenere un enunciato equivalente a quello assegnato. In linea di principio, per trovare un enunciato equivalente alla fbf data ci basterebbe applicare anche solo una equivalenza logica di base. Noi, invece, cercheremo piuttosto di semplificare la fbf data, cercando di ottenere la fbf equivalente più corta tra tutte le ffbf equivalenti.

1. $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \equiv Q$

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$	dato
$(Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)$	$\wedge$-commutatività
$Q \wedge (P \vee \neg P)$	$\wedge$-distributività
Q	congiunto tautologico

2. $(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \equiv P$

$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ dato
$P \vee (Q \wedge \neg Q)$ $\vee$-distributività
P disgiunto contraddittorio

3. $(\neg B \vee (A \wedge B)) \wedge (A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv A$

$(\neg B \vee (A \wedge B)) \wedge (A \vee (\neg A \wedge B))$ dato
$((\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee B)) \wedge ((A \vee \neg A) \wedge (A \vee B))$ $\vee$-distributività (x2)
$(\neg B \vee A) \wedge (A \vee B)$ congiunto tautologico (x2)
$(A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)$ $\vee$-commutatività
$A \vee (\neg B \wedge B)$ $\vee$-distributività
A disgiunto contraddittorio

4. $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \equiv A \wedge \neg A$

$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ dato
$A \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ per l'equivalenza (2) di questo esercizio
$A \wedge \neg A$ per l'equivalenza (2) di questo esercizio

5. $\neg((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)) \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

$\neg((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C))$ dato
$\neg((A \vee B) \vee C) \vee \neg((\neg A \vee \neg B) \vee \neg C)$ De Morgan + $\vee$-associatività
$(\neg(A \vee B) \wedge \neg C) \vee (\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg\neg C)$ De Morgan
$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg\neg A \wedge \neg\neg B \wedge \neg\neg C)$ De Morgan
$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$ doppia negazione

6. $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C) \equiv$
$((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee ((A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee ((B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C))$

Consideriamo dapprima $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$, che chiamiamo (6*):

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ dato
$((A \wedge \neg B) \vee \neg A) \wedge ((A \wedge \neg B) \vee B)$ $\vee$-distributività con sostituzione

$((A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)) \wedge ((A \vee B) \wedge (\neg B \vee B))$ $\vee$-distr. con sost.
$(\neg B \vee \neg A) \wedge (A \vee B)$ congiunto tautologico (x2)
$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ $\vee$-commutatività + $\wedge$-commutatività

A questo punto possiamo applicare l'equivalenza appena dimostrata all'equivalenza (6):

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$ dato
$((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee ((A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee ((B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C))$ per (6*) con sost. (x3)

Esercizio 16

Dimostrare le seguenti equivalenze:

1. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
2. $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
3. $\neg(A \wedge \neg(B \wedge C)) \equiv \neg A \vee (B \wedge C)$
4. $\neg(A \vee \neg B) \wedge (C \wedge \neg(A \wedge B)) \equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge \neg B)$
5. $\neg(\neg A \wedge B \vee \neg A) \equiv \neg(\neg A \wedge B) \wedge \neg\neg A$
6. $\neg(\neg(A \vee B) \wedge B) \equiv \neg\neg(A \vee B) \vee \neg B$
7. $\neg((A \vee \neg B) \wedge \neg C) \wedge \neg(\neg C \vee (\neg D \wedge E)) \equiv ((\neg A \wedge B) \vee C) \wedge (C \wedge (D \vee \neg E))$
8. $((\neg A \wedge B) \vee C) \wedge (C \wedge (D \vee \neg E)) \equiv (\neg A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge \neg E) \vee (C \wedge D) \vee (C \wedge \neg E)$
9. $\neg((A \vee \neg B) \wedge \neg C) \wedge \neg(\neg C \vee (\neg D \wedge E)) \equiv (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge C \wedge (D \vee \neg E)$
10. $\neg(\neg((A \vee \neg B) \wedge \neg C) \wedge \neg(\neg C \vee (\neg D \wedge E))) \equiv (A \vee \neg B) \wedge \neg C) \vee (\neg C \vee (\neg D \wedge E))$
11. $(A \vee B) \rightarrow (C \vee D) \equiv ((A \rightarrow C) \vee (A \rightarrow D)) \wedge ((B \rightarrow C) \vee (B \rightarrow D))$
12. $((A \rightarrow C) \vee (A \rightarrow D)) \wedge ((B \rightarrow C) \vee (B \rightarrow D)) \equiv ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \vee ((A \rightarrow D) \wedge (B \rightarrow D))$
13. $A \leftrightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge ((B \wedge C) \rightarrow A)$

Soluzione (la soluzione verrà data solamente di alcune delle equivalenze di questo esercizio):

1. $(A \lor B) \land C \equiv (A \land C) \lor (B \land C)$

$(A \lor B) \land C$	dato
$C \land (A \lor B)$	$\land$-commutatività
$(C \land A) \lor (C \land B)$	$\land$-distributività
$(A \land C) \lor (B \land C)$	$\land$-commutatività

2. $(A \land B) \lor C \equiv (A \lor C) \land (B \lor C)$

$(A \land B) \lor C$	dato
$C \lor (A \land B)$	$\lor$-commutatività
$(C \lor A) \land (C \lor B)$	$\lor$-distributività
$(A \lor C) \land (B \lor C)$	$\lor$-commutatività

3. $\neg(A \land \neg(B \land C)) \equiv \neg A \lor (B \land C)$

$\neg(A \land \neg(B \land C))$	dato
$\neg A \lor \neg\neg(B \land C)$	De Morgan
$\neg A \lor (B \land C)$	doppia negazione

5. $\neg((\neg A \land B) \lor \neg A) \equiv \neg(\neg A \land B) \land \neg\neg A$

$\neg((\neg A \land B) \lor \neg A)$	dato
$\neg(\neg A \land B) \land \neg\neg A$	De Morgan con sostituzione

6. $\neg(\neg(A \lor B) \land B) \equiv \neg\neg(A \lor B) \lor \neg B$

$\neg(\neg(A \lor B) \land B)$	dato
$\neg\neg(A \lor B) \lor \neg B$	De Morgan con sostituzione

10. $\neg(\neg((A \vee \neg B) \wedge \neg C) \wedge \neg(\neg C \vee (\neg D \wedge E))) \equiv (A \vee \neg B) \wedge \neg C) \vee (\neg C \vee (\neg D \wedge E))$

$\neg(\neg((A \vee \neg B) \wedge \neg C) \wedge \neg(\neg C \vee (\neg D \wedge E)))$ dato
$\neg\neg((A \vee \neg B) \wedge \neg C) \vee \neg\neg(\neg C \vee (\neg D \wedge E))$ De Morgan con sostituzione
$((A \vee \neg B) \wedge \neg C) \vee (\neg C \vee (\neg D \wedge E))$ doppia negazione

11. $(A \vee B) \to (C \vee D) \equiv ((A \to C) \vee (A \to D)) \wedge ((B \to C) \vee (B \to D))$

$(A \vee B) \to (C \vee D)$ dato
$\neg(A \vee B) \vee (C \vee D)$ per sostituzione, dato che $A \to B \equiv \neg A \vee B$
$(\neg A \wedge \neg B) \vee (C \vee D)$ De Morgan
$(\neg A \vee (C \vee D)) \wedge (\neg B \vee (C \vee D))$ $\vee$-distributività con sostituzione
$((\neg A \vee C) \vee (\neg A \vee D)) \wedge ((\neg B \vee C) \vee (\neg B \vee D))$ $\vee$-distr. con sost. (x2)
$((A \to C) \vee (A \to D)) \wedge ((B \to C) \vee (B \to D))$ per $A \to B \equiv \neg A \vee B$ (x4)

13. $A \leftrightarrow (B \wedge C) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C) \wedge ((B \wedge C) \to A)$

$A \leftrightarrow (B \wedge C)$ dato
$(A \to (B \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \to A)$ per $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$
$(\neg A \vee (B \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \to A)$ per $A \to B \equiv \neg A \vee B$
$((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \wedge ((B \wedge C) \to A)$ $\vee$-distributività
$((A \to B) \wedge (A \to C)) \wedge ((B \wedge C) \to A)$ dato che $A \to B \equiv \neg A \vee B$ (x2)

Esercizio 17

Semplificare le seguenti formule usando le equivalenze.

1. $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
2. $(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$
3. $(P \to Q) \vee \neg P$
4. $P \to (P \wedge Q)$
5. $(P \wedge Q) \vee P$
6. $(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

7. $\neg Q \wedge (Q \vee P)$

8. $(P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg Q \vee P)$

9. $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C)$

10. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A)$

11. $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C)$

12. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$

13. $((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$

14. $(\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

15. $(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow Q)$

Soluzione (la soluzione verrà data solamente di alcune delle equivalenze di questo esercizio):

3. $(P \rightarrow Q) \vee \neg P$

$(P \rightarrow Q) \vee \neg P$ dato
$(\neg P \vee Q) \vee \neg P$ per $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
$\neg P \vee (Q \vee \neg P)$ $\vee$-associatività
$\neg P \vee (\neg P \vee Q)$ $\vee$-commutatività
$(\neg P \vee \neg P) \vee Q$ $\vee$-associatività
$\neg P \vee Q$ $\vee$-idempotenza
$P \rightarrow Q$ per $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

4. $P \rightarrow (P \wedge Q)$

$P \rightarrow (P \wedge Q)$ dato
$\neg P \vee (P \wedge Q)$ per $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
$(\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q)$ $\vee$-distributività
$\neg P \vee Q$ congiunto tautologico
$P \rightarrow Q$ per $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

5. $(P \land Q) \lor P$

$(P \land Q) \lor P$ dato

$P \lor (P \land Q)$ $\lor$-commutatività

$(P \lor (P \land Q)) \land (P \lor \neg P)$ aggiunta di un congiunto tautologico

$P \lor ((P \land Q) \land \neg P)$ $\lor$-distributività

$P \lor ((Q \land P) \land \neg P)$ $\land$-commutatività

$P \lor (Q \land (P \land \neg P)$ $\land$-associatività

$P \lor (P \land \neg P)$ congiunto contraddittorio

P disgiunto contraddittorio

9. $(A \land B) \leftrightarrow (A \land C)$

$(A \land B) \leftrightarrow (A \land C)$ dato

$(\neg(A \land B) \lor (A \land C)) \land (\neg(A \land C) \lor (A \land B))$ per $A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)$

$((\neg A \lor \neg B) \lor (A \land C)) \land ((\neg A \lor \neg C) \lor (A \land B))$ De Morgan (x2)

$(\neg A \lor (A \land C) \lor \neg B) \land (\neg A \lor (A \land B) \lor \neg C)$ $\lor$-assoc. + $\lor$-comm.

$(((\neg A \lor A) \land (\neg A \lor C)) \lor \neg B) \land (((\neg A \lor A) \land (\neg A \lor B)) \lor \neg C)$ $\lor$-distr. (x2)

$((\neg A \lor C) \lor \neg B) \land ((\neg A \lor B) \lor \neg C)$ congiunto tautologico (x2)

$(\neg A \lor (C \lor \neg B)) \land (\neg A \lor (B \lor \neg C))$ $\lor$-associatività

$\neg A \lor ((C \lor \neg B) \land (B \lor \neg C))$ $\lor$-distributività con sostituzione

$\neg A \lor (B \leftrightarrow C)$ sostituzione di $A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)$

$A \to (B \leftrightarrow C)$ sostituzione di $A \to B \equiv \neg A \lor B$

12. $(A \to B) \leftrightarrow (B \to A)$

$(A \to B) \leftrightarrow (B \to A)$ dato

$(\neg A \lor B) \leftrightarrow (\neg B \lor A)$ $\to$Def (x2)

$((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)) \lor (\neg(\neg A \lor B) \land \neg(\neg B \lor A))$ $\leftrightarrow$Def

$((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)) \lor (\neg\neg A \land \neg B \land \neg\neg B \land \neg A)$ De Morgan (x2)

$((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)) \lor (A \land \neg B \land B \land \neg A)$ DN (x2)

$(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)$ Contraz. Disgiunz.

$A \leftrightarrow B$ $\leftrightarrow$Def

13. $((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$

$((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$ dato

$\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P$ Eliminaz. $\to$

$(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg\neg Q) \vee \neg P$ De Morgan

$((\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg\neg Q) \vee \neg P$ De Morgan

$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee \neg P)$ DN + Assoc.

$(P \vee Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q \vee \neg P)$ Distrib.

$(P \vee \neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q \vee \neg P)$ Commut.

$(P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q)$ Disg. Tautol. (x2)

$(P \vee \neg P)$ Cong. Tautol.

14. $(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$

$(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$ dato

$\neg(\neg\neg Q \vee \neg P) \vee (\neg P \vee Q)$ Eliminaz. $\to$

$(\neg\neg\neg Q \wedge \neg\neg P) \vee (\neg P \vee Q)$ De Morgan

$(\neg Q \wedge P) \vee (\neg P \vee Q)$ DN (x2)

$(\neg Q \vee \neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P \vee Q)$ $\vee$-Distrib.

$(\neg Q \vee Q) \wedge (P \vee \neg P)$ Disg. Tautol. (x2)

$(\neg Q \vee Q)$ Cong. Taut.

15. $(P \wedge Q) \to (\neg P \leftrightarrow Q)$

$(P \wedge Q) \to (\neg P \leftrightarrow Q)$ dato

$(P \wedge Q) \to ((\neg P \to Q) \wedge (Q \to \neg P))$ Eliminaz. $\leftrightarrow$

$\neg(P \wedge Q) \vee ((\neg\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P))$ Eliminaz. $\to$

$(\neg P \vee \neg Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P))$ De Morgan + DN

$(\neg P \vee \neg Q \vee P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg Q \vee \neg P)$ $\vee$-Distrib.

$(\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ Disg. Taut.+ Idempot. (x2)

$\neg P \vee \neg Q$ Cong. Taut.

Esercizio 18

Verificare se le seguenti coppie di ffbf sono logicamente equivalenti:

(1) A	$(A \lor B) \land (A \lor \neg B)$
(2) $\neg(A \land B)$	$\neg A \lor \neg B$
(3) $A \to B$	$\neg B \to A$
(4) $A \lor B$	$\neg B \to A$
(5) $A \land B$	$\neg(A \to \neg B)$
(6) $\neg(A \lor B)$	$\neg B$
(7) $A \to (B \to (A \to B))$	$B \to (A \to (B \to A))$

<u>Soluzione</u>:

Per risolvere l'esercizio, tra i diversi metodi possibili utilizziamo quelle delle tavole di verità.

(1) A $(A \lor B) \land (A \lor \neg B)$

A	B	(A	∨	B)	∧	(A	∨	¬	B)
T	T	T	T	T	T	T	T	F	T
T	F	T	T	F	T	T	T	T	F
F	T	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	T	T	F

Sono logicamente equivalenti.

(2) $\neg(A \land B)$ $\neg A \lor \neg B$

A	B	¬	(A	∧	B)
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F

A	B	¬	A	∨	¬	B
T	T	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	F

Sono logicamente equivalenti.

(3) $A \to B$ $\neg B \to A$

A	B	A	$\to$	B
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	F

A	B	$\neg$	B	$\to$	A
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	F

Non sono logicamente equivalenti.

(4) $A \vee B$ $\neg B \to A$

A	B	A	$\vee$	B
T	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	F

A	B	$\neg$	B	$\to$	A
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	F

Sono logicamente equivalenti.

(5) $A \wedge B$ $\neg(A \to \neg B)$

A	B	A	$\wedge$	B
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	F	F	F

A	B	¬	(A	→	¬	B)
T	T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
F	T	F	F	T	F	T
F	F	F	F	T	T	F

Sono logicamente equivalenti.

(6) $\neg(A \vee B)$ $\neg B$

A	B	¬	(A	∨	B)
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F

A	B	¬	B
T	T	F	T
T	F	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F

Non sono logicamente equivalenti.

Esercizio 19

Date le prove semantiche delle seguenti conseguenze logiche:

1. $A \to B, B \to C \vDash A \to C$
2. $(A \vee B) \wedge C, A \to \neg C \vDash B$
3. $(A \vee B) \wedge C \mathrel{=\!\!|\!\vDash} (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
4. $P \to \neg Q, Q \vDash \neg P$
5. $P \vDash (P \to Q) \to Q$
6. $Q \to R \vDash (P \wedge Q) \to (P \wedge R)$
7. $P \vDash Q \to (P \wedge Q)$
8. $\neg P \to P \vDash P$
9. $Q, P \leftrightarrow Q \vDash P$

10. $(P \lor Q) \leftrightarrow P \vDash Q \to P$

11. $P \vDash P$

12. $P, \neg(P \land Q) \vDash \neg Q$

13. $P \to Q \Dashv\vDash \neg(P \land \neg Q)$

14. $\neg(P \land Q) \Dashv\vDash \neg P \lor \neg Q$

15. $P \land Q \Dashv\vDash \neg(\neg P \lor \neg Q)$

16. $\vDash (\neg P \to P) \to P$

17. $\vDash P \to (Q \to P \land Q)$

<u>Soluzione</u>:

1. $A \to B, B \to C \vDash A \to C$

   Supponiamo che $v(A \to B) = v(B \to C) = 1$, ma che, per *reductio*, $v(A \to C) = 0$. Quest'ultimo caso implica, per le condizioni del condizionale, che $v(A) = 1$ e $v(C) = 0$. Ma allora, affinché $A \to B$ sia vero (rispetto a v), B deve essere vero (rispetto a v), nel qual caso $B \to C$ non è vero (rispetto a v). Quindi, non può esserci un caso in cui $A \to C$ è falso senza che anche una delle premesse sia falsa. Quindi non ci può essere un controesempio all'argomento.

2. $(A \lor B) \land C, A \to \neg C \vDash B$

   Supponiamo, per *reductio*, che $v(B) = 0$ ma che entrambe le premesse siano vere. In questo caso $v(A \to \neg C) = 1$, e siccome $A \to \neg C$ è equivalente a $(\neg A \lor \neg C)$, allora $v(\neg A \lor \neg C) = 1$, che richiede che $v(\neg A) = 1$ o $v(\neg C) = 1$. Quindi $v(A) = 0$ o $v(C) = 0$. In entrambi i casi, $(A \lor B) \land C$ non può essere vero (rispetto a v).

3. $(A \lor B) \land C \Dashv\vDash (A \land C) \lor (B \land C)$

   Da sinistra a destra

   Sia $v((A \lor B) \land C) = 1$. Si supponga poi, per *reductio*, che la conclusione sia falsa, per cui $v(A \land C) = 0$ o $v(B \land C) = 0$. Siccome, per ipotesi iniziale e condizioni della congiunzione, $v(C) = 1$, deve essere $v(A) = 0 = v(B)$. Quindi $v(A \lor B) = 0$, contraddicendo la nostra ipotesi iniziale (che richiede, per condizione della congiunzione, che sia vera).

Da destra a sinistra

Sia $v((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) = 1$, per cui C e B sono vere rispetto a v, oppure C e A sono vere (rispetto a v). In ogni caso abbiamo, per le condizioni della disgiunzione, che $A \vee B$ è vero (rispetto a v), oltre al fatto che C è vero (rispetto a v).

4. $P \to \neg Q, Q \vDash \neg P$

   Supponiamo che $v(P \to \neg Q) = 1$, $v(Q) = 1$ e, per *reductio*, supponiamo che $v(\neg P) = 0$. Allora, per le condizioni della negazione $v(\neg Q) = 0$. Ma allora, poiché, per ipotesi, $v(P \to \neg Q) = 1$, $v(P) = 0$. Quindi, $v(\neg P) = 1$. Contraddizione.

5. $P \vDash (P \to Q) \to Q$

   Supponiamo che $v(P) = 1$ e che, per *reductio*, $v((P \to Q) \to Q) = 0$. Da quest'ultimo segue che $v((P \to Q) = 1$ e $v(Q) = 0$. Ma se $v(Q) = 0$ e $v(P) = 1$ (per prima assunzione), allora $v(P \to Q) = 0$. Contraddizione.

6. $Q \to R \vDash (P \wedge Q) \to (P \wedge R)$

   Supponiamo che $v(Q \to R) = 1$, e che, per *reductio*, $v((P \wedge Q) \to (P \wedge R)) = 0$. Allora $v(P \wedge Q) = 1$ e $v(P \wedge R) = 0$. Ma se $v(P \wedge Q) = 1$, allora $v(P) = 1$ e $v(Q) = 1$. Mentre se $v(P \wedge R) = 0$, visto che $v(P) = 1$, allora $v(R) = 0$. Ma allora $v(Q \to R) = 0$. Contraddizione.

7. $P \vDash Q \to (P \wedge Q)$

   Supponiamo che $v(P) = 1$ e che, per *reductio*, $v(Q \to (P \wedge Q) = 0$. Perché il condizionale sia falso deve essere $v(Q) = 1$ e $v(P \wedge Q) = 0$. Ma siccome $v(P) = 1$, allora deve essere $v(Q) = 0$. Contraddizione.

8. $\neg P \to P \vDash P$

   Supponiamo che $v(\neg P \to P) = 1$ e, per *reductio*, $v(P) = 0$. Allora, per le regole del condizionale, $v(\neg P) = 0$, ma allora, per le regole della negazione, $v(P) = 1$. Contraddizione.

9. $Q, P \leftrightarrow Q \vDash P$

   Supponiamo che $v(Q) = 1$. Allora, per le regole del condizionale, anche $v(P) = 1$.

10. $(P \vee Q) \leftrightarrow P \vDash Q \rightarrow P$

    Supponiamo che $v((P \vee Q) \leftrightarrow P) = 1$. Poi, per *reductio*, supponiamo che $v(Q \rightarrow P) = 0$, allora, $v(P) = 0$ e $v(Q) = 1$. Ma se $v(P) = 0$, per le regole del bicondizionale anche $v(P \vee Q) = 0$. Ma allora, per le condizioni della disgiunzione, $v(P) = v(Q) = 0$. Contraddizione.

11. $P \vDash P$

    Supponiamo che $v(P) = 1$. Allora $v(P) = 1$.

12. $P, \neg(P \wedge Q) \vDash \neg Q$

    Supponiamo che $v(P) = v(\neg(P \wedge Q)) = 1$. Per le regole della negazione, $v(P \wedge Q) = 0$, e siccome $v(P) = 1$, deve essere $v(Q) = 0$. Supponiamo poi, per *reductio*, che $v(\neg Q) = 0$. Allora, per la negazione, $v(Q) = 1$. Contraddizione.

13. $P \rightarrow Q \dashv\vDash \neg(P \wedge \neg Q)$

    Da sinistra a destra:

    Supponiamo che $v(P \rightarrow Q) = 1$ e, per *reductio*, $v(\neg(P \wedge \neg Q)) = 0$. Dato quest'ultimo, $v(P \wedge \neg Q) = 1$, e quindi $v(P) = 1$ e $v(\neg Q) = 1$, cosicché $v(Q) = 0$. Ma se $v(P) = 1$ e $v(Q) = 0$, allora $v(P \rightarrow Q) = 0$. Contraddizione.

    Da destra a sinistra:

    Supponiamo che $v(\neg(P \wedge \neg Q)) = 1$. Supponiamo, poi, che per *reductio* $v(P \rightarrow Q) = 0$, cosicché $v(P) = 1$ e $v(Q) = 0$. Ma se è così, allora $v(\neg Q) = 1$, $v(P \wedge \neg Q) = 1$, ed infine $v(\neg(P \wedge \neg Q)) = 0$. Contraddizione.

14. $\neg(P \wedge Q) \dashv\vDash \neg P \vee \neg Q$

    Da sinistra a destra:

    Supponiamo che $v(\neg(P \wedge Q) = 1$. Per *reductio* supponiamo che $v(\neg P \vee \neg Q) = 0$. Da quest'ultimo segue che $v(\neg P) = 0$ e $v(\neg Q) = 0$, quindi $v(P) = 1$ e

$v(Q) = 1$. Ma allora $v(P \wedge Q) = 1$, e $v(\neg(P \wedge Q)) = 0$, contro l'ipotesi.

Da destra a sinistra:

Supponiamo che $v(\neg P \vee \neg Q) = 1$. Supponiamo poi, per *reductio*, che $v(\neg(P \wedge Q) = 0$. Dato quest'ultimo, $v(P \wedge Q) = 1$, e quindi $v(P) = 1$ e $v(Q) = 1$. Ma allora $v(P \vee Q) = 1$, e $v(\neg(P \vee Q)) = 0$, contro l'ipotesi.

15. $P \wedge Q \dashv\vDash \neg(\neg P \vee \neg Q)$

    Da sinistra a destra:

    Supponiamo che $v(P \wedge Q) = 1$. Allora $v(P) = 1$ e $v(Q) = 1$. Ma allora $v(\neg P) = 0$ e $v(\neg Q) = 0$, cosicché $v(\neg P \vee \neg Q) = 0$, e $v(\neg(\neg P \vee \neg Q)) = 1$.

    Da destra a sinistra:

    Supponiamo che $v(\neg(\neg P \vee \neg Q) = 1$. Quindi $v(\neg P \vee \neg Q) = 0$, cosicché $v(\neg Q) = 0$ e $v(\neg P) = 0$, da cui segue che $v(P) = 1$ e $v(Q) = 1$. Ma allora anche $v(P \wedge Q) = 1$.

16. $\vDash (\neg P \to P) \to P$

    Supponiamo, per *reductio*, che $v((\neg P \to P) \to P) = 0$. allora $v(\neg P \to P) = 1$ e $v(P) = 0$. Ma dato quest'ultimo, $v(\neg P) = 1$. Quindi, dati $v(P) = 0$ e $v(\neg P) = 1$, $v(\neg P \to P) = 0$. Contraddizione.

17. $\vDash P \to (Q \to P \wedge Q)$

    Supponiamo, per *reductio*, che $v = (P \to (Q \to P \wedge Q)) = 0$. Allora $v(P) = 1$ e $v(Q \to P \wedge Q) = 0$. Da quest'ultimo segue che $v(Q) = 1$ e $v(P \wedge Q) = 0$. Ma da quest'ultimo segue che o $v(P) = 0$ o $v(Q) = 0$. In entrambe i casi si ha una contraddizione.

Esercizio 20

Dimostrare semanticamente che le seguenti forme di ragionamento sono valide:

1. *Modus Ponens*: $A \to B, A \vDash B$
2. *Modus Tollens*: $A \to B, \neg B \vDash \neg A$

3. *Sillogismo Disgiuntivo* (MTP): $A \lor B, \neg A \vDash B$
4. *Contrapposizione*: $A \to B \dashv\vDash \neg B \to \neg A$
5. *Ex Contradictione Quodlibet*: $A, \neg A \vDash B$
6. *Introduzione di* $\lor$: $A \vDash A \lor B$
7. *Introduzione di* $\land$: $A, B \vDash A \land B$
8. *Eliminazione di* $\land$: $A \land B \vDash A$
9. *De Morgan*: $\neg(A \lor B) \dashv\vDash \neg A \land \neg B$
10. *De Morgan*: $\neg(A \land B) \dashv\vDash \neg A \lor \neg B$

Soluzione:

1. *Modus Ponens*: $A \to B, A \vDash B$

   Sia $v(A) = v(A \to B) = 1$. Per le condizioni di verità del condizionale, $v(A) = 0$ o $v(B) = 1$. Poiché, per ipotesi, $v(A) = 1$, deve essere $v(B) = 1$. Quindi, concludiamo che se sia A che $A \to B$ sono vere, anche B deve essere vera.

2. *Modus Tollens*: $A \to B, \neg B \vDash \neg A$

   Supponiamo, per *reductio*, che ci sia un caso tale che $v(A \to B) = 1 = v(\neg B)$, ma che $v(\neg A) = 0$. Per le condizioni della negazione, $v(A) = 1$ e $v(B) = 0$. Ma, allora, $v(A \to B) = 0$, che contraddice la nostra supposizione iniziale.

3. *Sillogismo Disgiuntivo* (MTP): $A \lor B, \neg A \vDash B$

   Si supponga che $v(A \lor B) = 1 = v(\neg A)$. Per le condizioni di verità della negazione, abbiamo che $v(A) = 0$. Ma allora, poiché $v(A \lor B) = 1$, le condizioni di verità per la disgiunzione implicano che $v(B) = 1$.

4. *Contrapposizione*: $A \to B \dashv\vDash \neg B \to \neg A$

   Da sinistra a destra:

   Supponiamo che $v(A \to B) = 1$. Per *reductio*, supponiamo che che $v(\neg B \to \neg A) = 0$, nel cui caso, $v(\neg B) = 1$ e $v(\neg A) = 0$. Ma allora, per le condizioni della negazione, $v(A) = 1$ e $v(B) = 0$, e, secondo le condizioni del condizionale, $v(A \to B) = 0$. Questo contraddice la nostra supposizione iniziale.

Da destra a sinistra:

Al contrario, supponiamo che $v(\neg B \to \neg A) = 1$, ma che, per *reductio*, $v(A \to B) = 0$, nel cui caso $v(A) = 1$ e $v(B) = 0$, e quindi $v(\neg A) = 0$ e $v(\neg B) = 1$. Da questo segue che $v(\neg B \to \neg A) = 0$, che contraddice l'ipotesi iniziale.

5. *Ex Contradictione Quodlibet*: $A, \neg A \vDash B$

   Un controesempio è un caso in cui tutti le premesse (se presenti) sono vere e la conclusione è falsa. Poiché non esiste un caso in cui sia A che $\neg A$ siano vere, non possiamo ottenere un controesempio.

6. *Introduzione di* $\vee$: $A \vDash A \vee B$

   Le condizioni di verità per la disgiunzione ci dicono che $A \vee B$ è vera se almeno un disgiunto è vero. Quindi non può esserci un caso tale che $v(A) = 1$ ma $v(A \vee B) = 0$. La forma dell'argomento è valida.

7. *Introduzione di* $\wedge$: $A, B \vDash A \wedge B$

   Le condizioni di verità della congiunzione ci dicono che $A \wedge B$ è vera se e solo se entrambe i congiunti sono veri. Quindi non ci può essere una v tale che ciascun A e B sia vero rispetto a v, ma $A \wedge B$ non sia vero rispetto a v. Quindi, la forma dell'argomento è valida.

8. *Eliminazione di* $\wedge$: $A \wedge B \vDash A$

   Le condizioni di verità per la congiunzione ci dicono che $A \wedge B$ è vero se e solo se entrambe i congiunti sono veri. Quindi, ogni caso in cui $A \wedge B$ è vero, anche A è vero.

9. *De Morgan*: $\neg(A \vee B) \dashv\vDash \neg A \wedge \neg B$

   Da sinistra a destra:

   Sia $v(\neg(A \vee B)) = 1$, nel qual caso $v(A \vee B) = 0$, e quindi $v(A) = 0 = v(B)$. Da cui segue che $v(\neg A) = 1 = v(\neg B)$, e quindi $v(\neg A \wedge \neg B) = 1$. (Le condizioni di verità/falsità coinvolte sono la negazione, disgiunzione, negazione e poi congiunzione, in quest'ordine).

Da destra a sinistra:

Supponiamo che $v(\neg A \wedge \neg B) = 1$, nel cui caso $v(\neg A) = 1 = v(\neg B)$, e quindi $v(A) = 0 = v(B)$, e così $v(A \vee B) = 0$ per le condizioni della disgiunzione. Ma allora, per le condizioni della negazione, $v(\neg(A \vee B)) = 1$.

10. *De Morgan*: $\neg(A \wedge B) \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg A \vee \neg B$

    Da sinistra a destra:

    Supponiamo che $v(\neg(A \wedge B)) = 1$, nel cui caso $v(A \wedge B) = 0$. Quindi, in base alle condizioni della congiunzione, una tra A e B deve essere falsa (rispetto a v). Nel cui caso una tra $\neg A$ e $\neg B$ è vera (rispetto a v). Ma allora, per le condizioni della disgiunzione, otteniamo che $v(\neg A \vee \neg B) = 1$.

    Da destra a sinistra:

    Supponiamo che $v(\neg A \vee \neg B) = 1$, nel cui caso $v(\neg A) = 1$ o $v(\neg B) = 1$, e quindi $v(A) = 0$ o $v(B) = 0$. In ogni caso, almeno un congiunto in $A \wedge B$ è falso (rispetto a v), e quindi $v(A \wedge B) = 0$, e $v(\neg(A \wedge B)) = 1$.

2.3 Alberi di refutazione

Esercizio 21

Verificare quali delle seguenti formule sono tautologie usando il metodo degli alberi di refutazione. Per le formule non tautologiche, determinare per quali valori di verità risultano false. Verificatelo usando le tavole di verità.

1. $(A \vee B) \to A$
2. $(A \wedge B) \to A$
3. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
4. $((A \to B) \to B) \vee \neg B$
5. $(B \to (A \wedge C)) \to (A \wedge (B \to C))$

6. $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$
7. $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg B \vee A)$
8. $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow \neg A$
9. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$
10. $(A \rightarrow (B \wedge C)) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$
11. $(A \rightarrow (B \vee C)) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$
12. $((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C)) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$
13. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C))$
14. $((A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C)) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$
15. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C))$
16. $P \leftrightarrow \neg(P \vee Q)$
17. $\neg((P \wedge Q) \leftrightarrow (P \vee Q))$
18. $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee R)$
19. $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Soluzione:

Un albero di refutazione è una ricerca esaustiva dei modi in cui le ffbf della lista possono essere vere, e può essere utilizzato sia per valutare una singola fbf (ovvero per scoprire se essa è una tautologia, una contingenza o una contraddizione) che per indagare la validità di un argomento.
Per valutare una singola fbf, essa va riportata come premessa in cima all'albero. A questo punto vanno applicate opportunamente le 10 regole degli alberi di refutazione per sviluppare l'albero.

Diamo alcune definizioni:

- Cammino (o ramo) *chiuso*: un cammino si dice chiuso (e si indica con una «X») quando presenta al suo interno una lettera enunciativa e la sua negazione.
- Cammino *terminato*: un cammino si dice terminato se è chiuso, o se le sole ffbf non segnate che contiene sono lettere enunciative o loro negazioni, di modo che nessun'altra regola si può applicare alle formule.

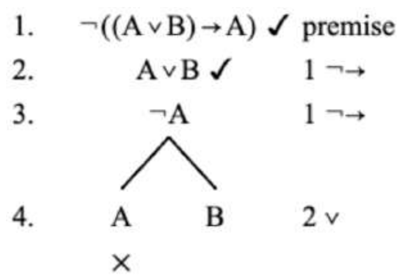
- Cammino *aperto*: un cammino si dice aperto quando è terminato e non è chiuso.
- Albero *terminato*: un albero si dice terminato quando tutti i suoi cammini sono terminati.
- Albero *chiuso*: un albero si dice chiuso quando tutti i suoi rami sono chiusi.
- Albero *aperto*: un albero si dice aperto quando almeno uno dei suoi rami è aperto.

Allora, se costruiamo l'albero di refutazione per una singola fbf, avremo che:

- se l'albero di una formula ϕ è chiuso, ϕ è una **contraddizione**;
- se l'albero di una formula ϕ è aperto, ϕ non è una contraddizione, e può dunque essere una tautologia o una contingenza. ϕ è una **tautologia** se l'albero di $\neg\phi$ è chiuso; invece, ϕ è una **contingenza** se l'albero di $\neg\phi$ è aperto.

Le soluzioni che riportiamo sono state ottenute utilizzando un Truth Tree Solver[2]. La colonna di sinistra riporta la numerazione dei passaggi dell'albero, corrispondente all'applicazione di una specifica regola. Al centro si trova l'albero di refutazione, con una spunta di fianco a tutte le ffbf segnate. La colonna di destra specifica quale regola è stata utilizzata.

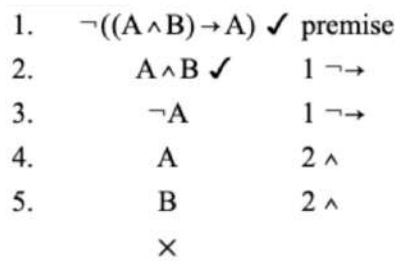
1. $(A \vee B) \to A$ non è una tautologia.



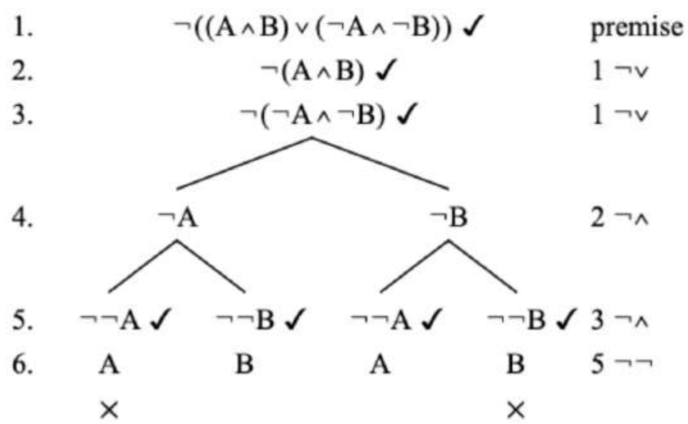
A	B	(A	∨	B)	→	A
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F

[2]Disponibile al link http://www.formallogic.com/en/truth-tree-solver

2. $(A \wedge B) \rightarrow A$ è una tautologia.



3. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ non è una tautologia.



A	B	(A	∧	B)	∨	(¬	A	∧	¬	B)
T	T	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T	F	T	F
F	T	F	F	T	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	T	T	F	T	T	F

4. $((A \to B) \to B) \vee \neg B$ è una tautologia.

1.	$\neg(((A \to B) \to B) \vee \neg B)$ ✓	premise
2.	$\neg((A \to B) \to B)$ ✓	1 $\neg\vee$
3.	$\neg\neg B$ ✓	1 $\neg\vee$
4.	$A \to B$ ✓	2 $\neg\to$
5.	$\neg B$	2 $\neg\to$
6.	B	3 $\neg\neg$
	×	

5. $(B \to (A \wedge C)) \to (A \wedge (B \to C))$ non è una tautologia.

1.	$\neg((B \to (A \wedge C)) \to (A \wedge (B \to C)))$ ✓				premise
2.	$B \to (A \wedge C)$ ✓				1 $\neg\to$
3.	$\neg(A \wedge (B \to C))$ ✓				1 $\neg\to$
4.	$\neg B$		$A \wedge C$ ✓		2 $\to$
5.	$\neg A$	$\neg(B \to C)$ ✓	$\neg A$	$\neg(B \to C)$ ✓	3 $\neg\wedge$
6.		B			5 $\neg\to$
7.		$\neg C$			5 $\neg\to$
8.		×	A	A	4 $\wedge$
9.			C	C	4 $\wedge$
10.			×	B	5 $\neg\to$
11.				$\neg C$	5 $\neg\to$
				×	

A	B	C	(B	→	(A	∧	C))	→	(A	∧	(B	→	C))
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	F	T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F	F	T	F	F	F	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F	F	F	F	F	F	T	F

6. $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$ è una tautologia.

1.	$\neg((A \wedge \neg A) \rightarrow B)$ ✓	premise
2.	$A \wedge \neg A$ ✓	$1 \neg\rightarrow$
3.	$\neg B$	$1 \neg\rightarrow$
4.	A	$2 \wedge$
5.	$\neg A$	$2 \wedge$
	×	

7. $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg B \vee A)$ è una tautologia.

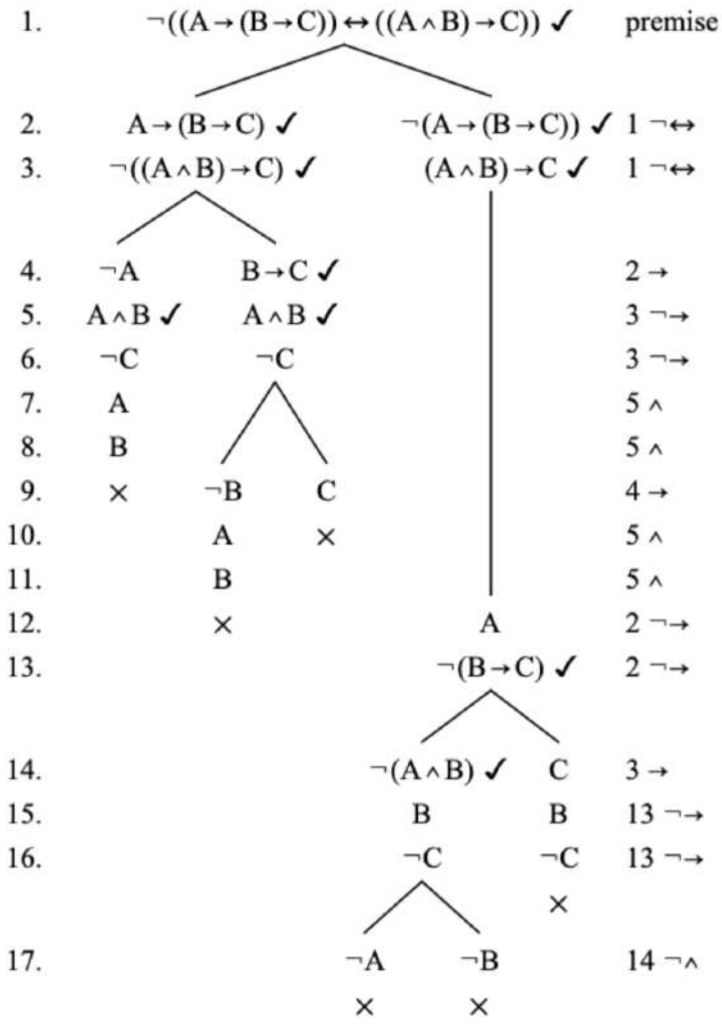
1.	$\neg(\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg B \vee A))$ ✓	premise
2.	$\neg(A \vee B)$ ✓	$1 \neg\rightarrow$
3.	$\neg(\neg B \vee A)$ ✓	$1 \neg\rightarrow$
4.	$\neg A$	$2 \neg\vee$
5.	$\neg B$	$2 \neg\vee$
6.	$\neg\neg B$ ✓	$3 \neg\vee$
7.	$\neg A$	$3 \neg\vee$
8.	B	$6 \neg\neg$
	×	

8. $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow \neg A$ non è una tautologia.

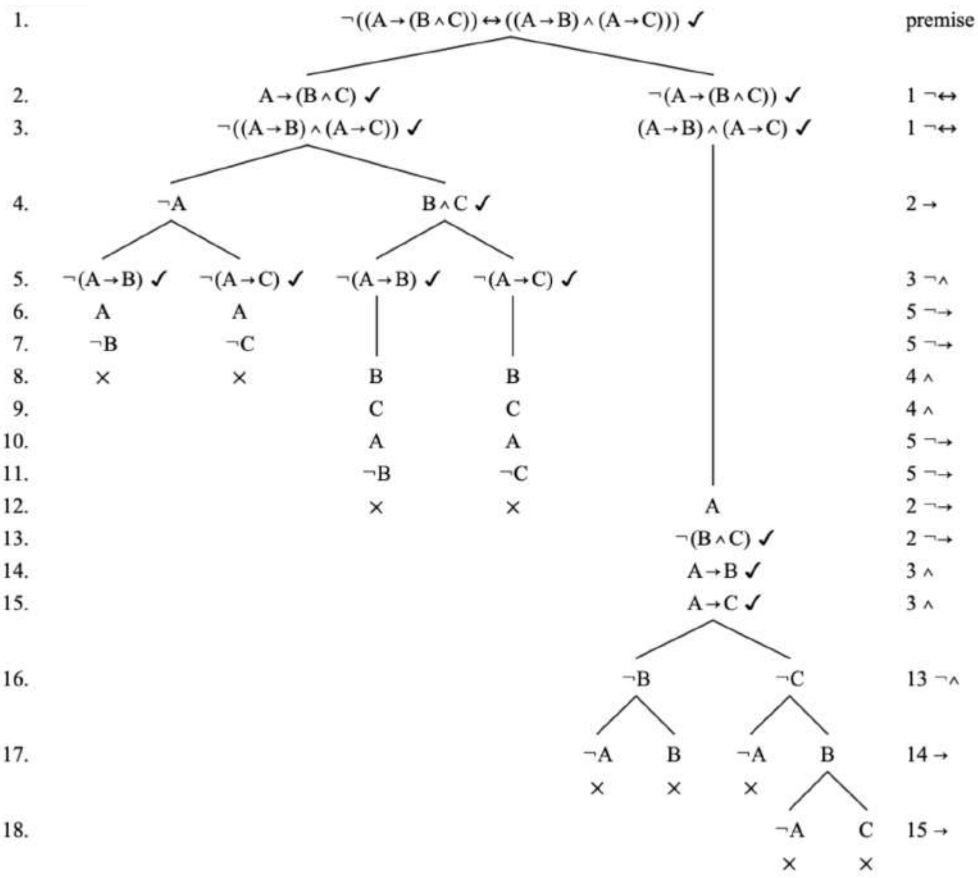
1.	$\neg(((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$ ✓		premise
2.	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$ ✓		$1 \neg\rightarrow$
3.	$\neg\neg A$ ✓		$1 \neg\rightarrow$
4.	$\neg(A \rightarrow B)$ ✓	B	$2 \rightarrow$
5.	A	A	$3 \neg\neg$
6.	A		$4 \neg\rightarrow$
7.	$\neg B$		$4 \neg\rightarrow$

A	B	((A	→	B)	→	B)	→	¬	A
T	T	T	T	T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F	F	T	T	F

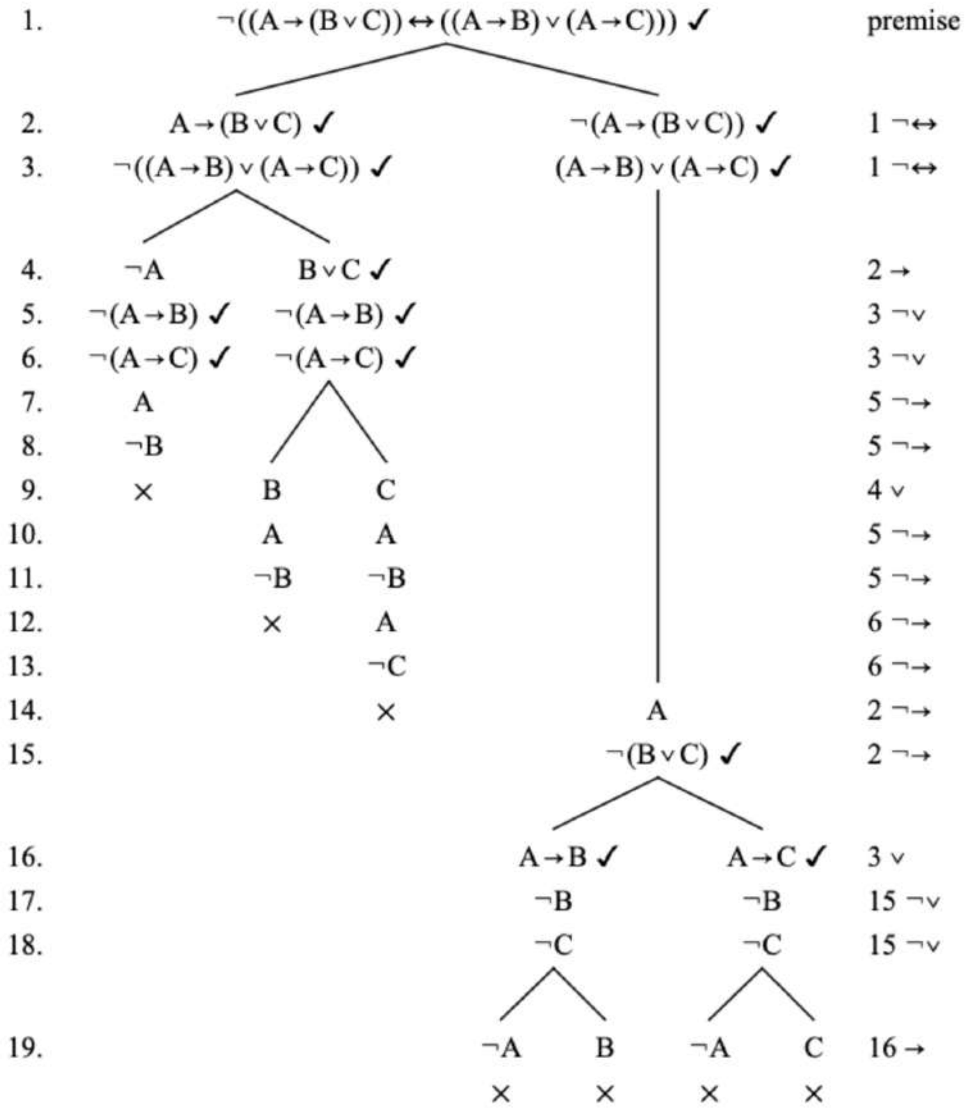
9. $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C)$ è una tautologia.



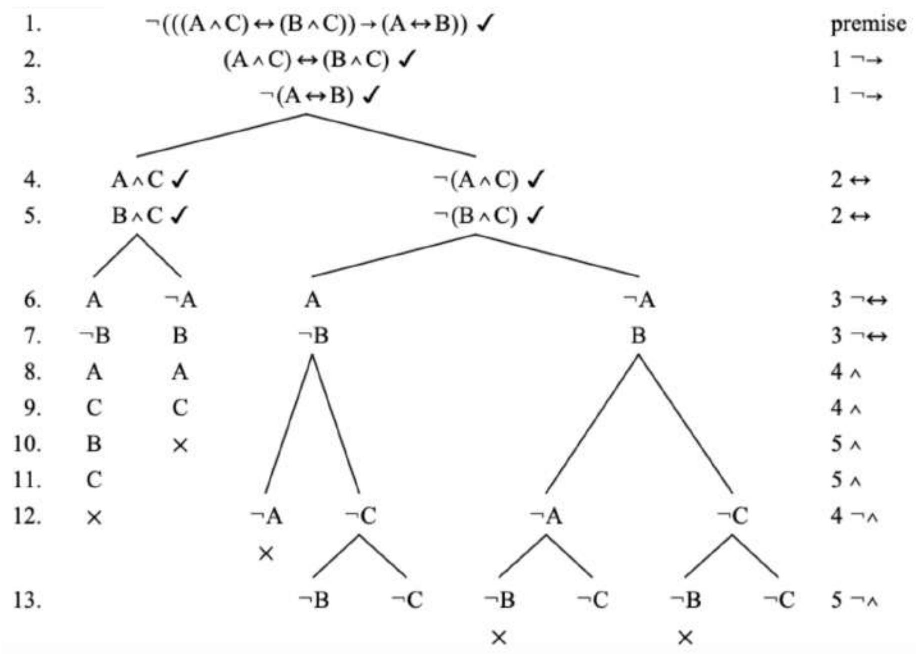
10. $(A \to (B \wedge C)) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (A \to C)$ è una tautologia.



11. $(A \to (B \vee C)) \leftrightarrow (A \to B) \vee (A \to C)$ è una tautologia.

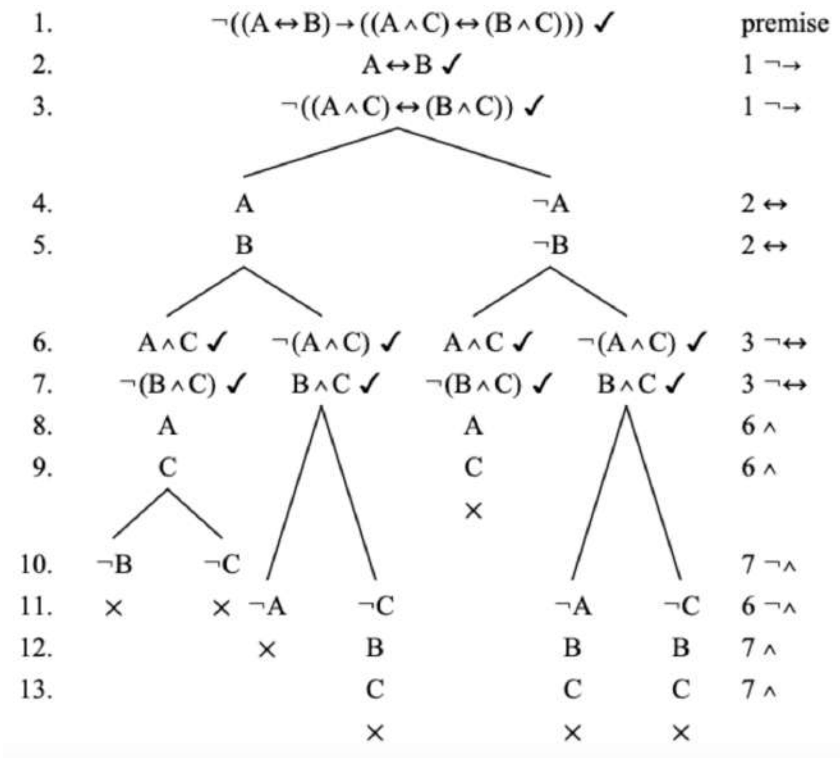


12. $((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C)) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$ non è una tautologia.

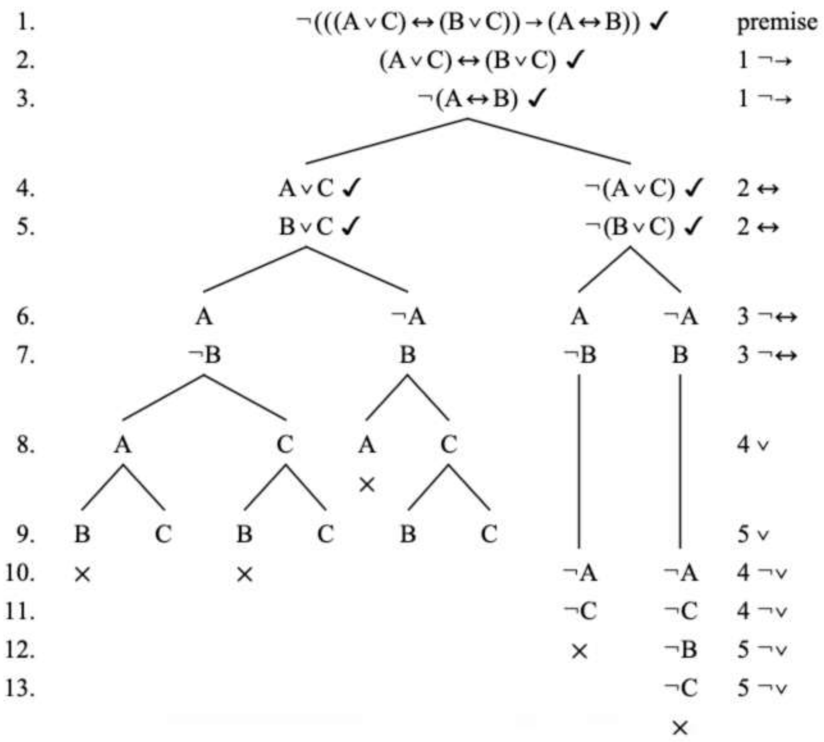


A	B	C	((A	∧	C)	↔	(B	∧	C))	→	(A	↔	B)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T	F	T	T	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T	T	F	F	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F	T	F	T	F

13. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C))$ è una tautologia.

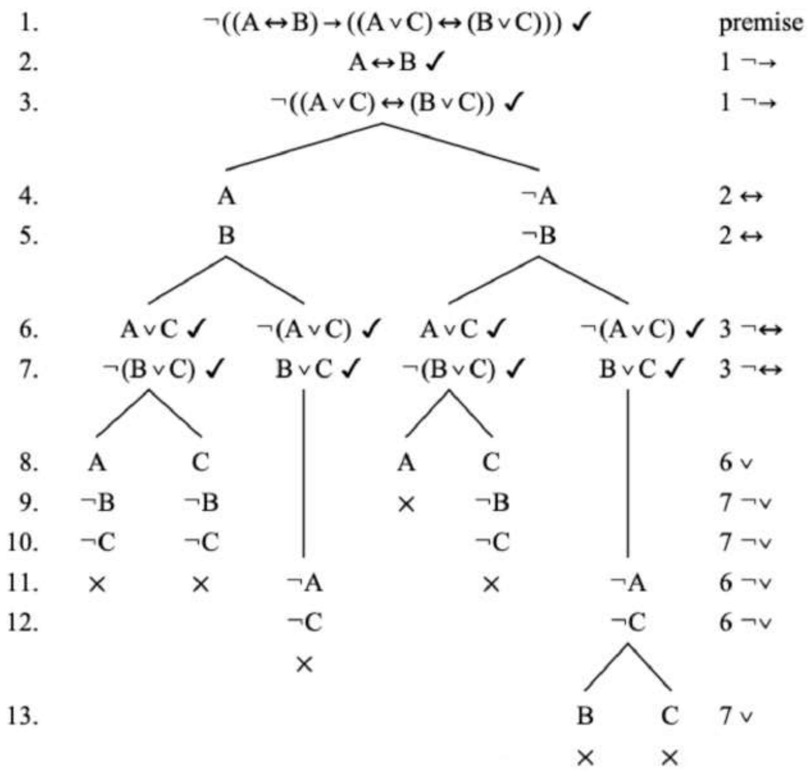


14. $((A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C)) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$ non è una tautologia.

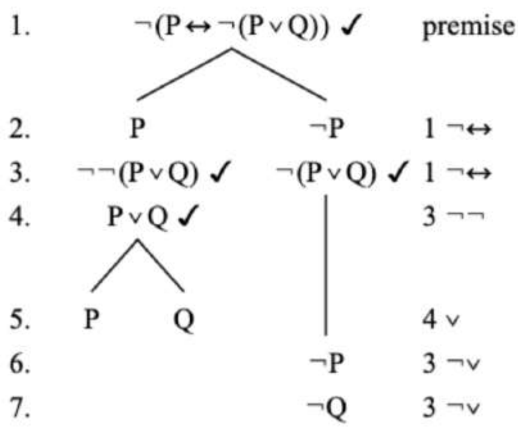


A	B	C	((A	∨	C)	↔	(B	∨	C))	→	(A	↔	B)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	F	F	F	T
F	T	F	F	F	F	F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T	F
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F	T	F	T	F

15. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C))$ è una tautologia.



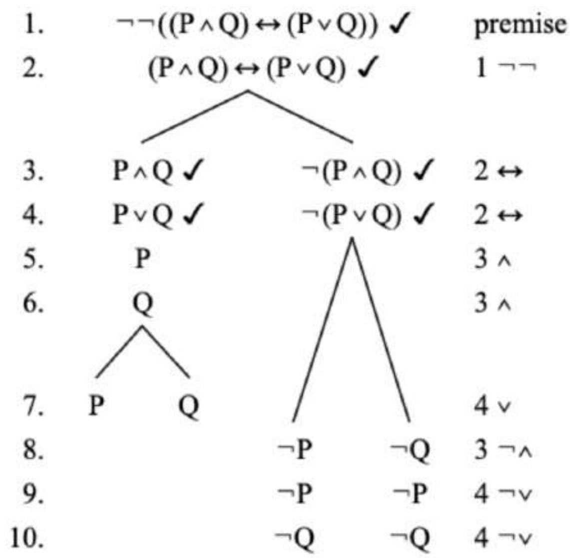
16. $P \leftrightarrow \neg(P \vee Q)$ non è una tautologia.



P	Q	P	↔	¬	(P	∨	Q)
T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F	F

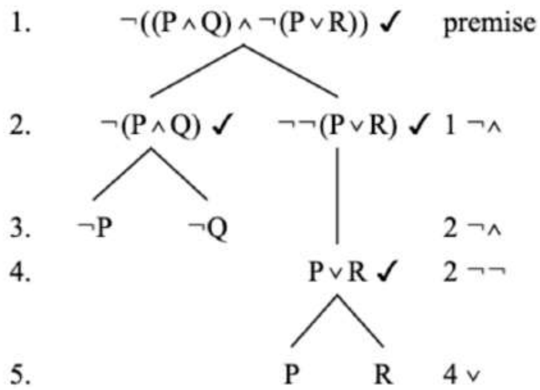
Può essere utile aggiungere un commento a questo esercizio. Si potrebbe erroneamente pensare che se tutti i cammini dell'albero di una formula sono aperti, la formula è sempre vera (e, dunque, la sua negazione sempre falsa). Ad esempio, in questo caso si potrebbe essere tentati di concludere che siccome tutti i cammini dell'albero della negazione della formula $P \leftrightarrow \neg(P \vee Q)$ sono aperti, allora non solo la formula non è una tautologia, ma è una contraddizione. Tuttavia, questa conclusione è sbagliata e la tavola di verità lo dimostra. Questa formula è, infatti, una contingenza.

17. $\neg((P \wedge Q) \leftrightarrow (P \vee Q))$ non è una tautologia.



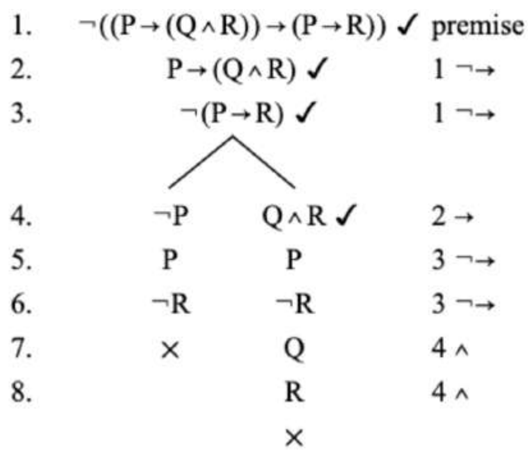
P	Q	¬	((P	∧	Q)	↔	(P	∨	Q))
T	T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F

18. $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee R)$ non è una tautologia.



P	Q	R	(P	∧	Q)	∧	¬ (	P	∨	R)
T	T	T	T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	F	F	F	T	T
F	T	F	F	F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	F

19. $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ è una tautologia.



Esercizio 22

Usando gli alberi di refutazione, determinate quali sequenze sono valide. Per le sequenze non valide, date un controesempio.

1. $Q \wedge R \vdash R \wedge Q$
2. $K \rightarrow U, S \wedge H \vdash U$
3. $K \vdash B \vee (K \vee G)$
4. $S \wedge (\neg T \wedge (K \wedge \neg F)) \vdash K$
5. $\neg P \rightarrow Q, \neg Q \vdash P$
6. $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$
7. $\neg\neg Q \rightarrow P, P \vdash Q$
8. $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \vdash P$
9. $N \wedge \neg R, K \wedge (J \rightarrow T), (\neg U \vee G) \wedge \neg J \vdash ((J \rightarrow T) \wedge \neg R) \wedge (\neg U \vee G)$
10. $(A \vee B), (A \vee C) \vdash A$
11. $(A \vee B), (A \vee C) \vdash \neg A \rightarrow (B \wedge C)$
12. $P \rightarrow (Q \rightarrow R), P, \neg R \vdash \neg Q$
13. $P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q, P \vdash R$

Soluzione:

Per capire se una sequenza è valida utilizzando gli alberi di refutazione basta costruire l'albero dell'insieme delle ffbf costituito da tutte le premesse e dalla negazione della conclusione. I casi che si possono presentare sono due:

1. L'albero è **chiuso**: questo significa che tutti i cammini sono chiusi e che, dunque, non esiste alcuna assegnazione che rende vere tutte le formule contemporaneamente. Dunque, non è mai il caso che le premesse sono tutte vere e la conclusione è falsa. Quindi la sequenza è **valida**.
2. L'albero è **aperto**: questo significa che almeno un cammino terminato è aperto, e dunque che esiste un'assegnazione che rende vere tutte le formule contemporaneamente. Quindi, è possibile che la conclusione sia falsa, nonostante tutte le premesse siano vere. Allora, la sequenza **non è valida**. In questo caso, lo stesso cammino aperto fornisce un possibile controesempio, rappresentato dall'assegnazione dei valori di verità alle variabili enunciative indicati nel cammino.

1. $Q \wedge R \vdash R \wedge Q$ è valida.

1.	$Q \wedge R$ ✓		premise
2.	$\neg(R \wedge Q)$ ✓		premise
3.	Q		$1 \wedge$
4.	R		$1 \wedge$
5.	$\neg R$	$\neg Q$	$2 \neg\wedge$
	×	×	

2. $K \to U, S \wedge H \vdash U$ non è valida.

1.	$K \to U$ ✓		premise
2.	$S \wedge H$ ✓		premise
3.	$\neg U$		premise
4.	$\neg K$	U	$1 \to$
5.	S	×	$2 \wedge$
6.	H		$2 \wedge$

Controesempio: $v \vDash_0 U$, $v \vDash_0 K$, $v \vDash_1 S$ e $v \vDash_1 H$.

3. $K \vdash B \vee (K \vee G)$ è valida.

1.	K	premise
2.	$\neg(B \vee (K \vee G))$ ✓	premise
3.	$\neg B$	$2 \neg\vee$
4.	$\neg(K \vee G)$ ✓	$2 \neg\vee$
5.	$\neg K$	$4 \neg\vee$
6.	$\neg G$	$4 \neg\vee$
	×	

4. $S \wedge (\neg T \wedge (K \wedge \neg F)) \vdash K$ è valida.

1.	S ∧ (¬T ∧ (K ∧ ¬F))✓	premise
2.	¬K	premise
3.	S	1 ∧
4.	¬T ∧ (K ∧ ¬F)✓	1 ∧
5.	¬T	4 ∧
6.	K ∧ ¬F ✓	4 ∧
7.	K	6 ∧
8.	¬F	6 ∧
	×	

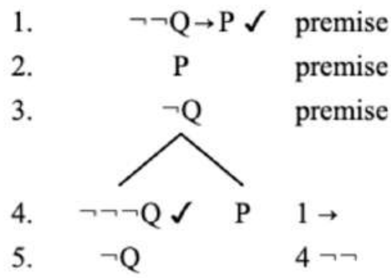
5. $\neg P \rightarrow Q, \neg Q \vdash P$ è valida.

1.	¬P→Q ✓		premise
2.	¬Q		premise
3.	¬P		premise
4.	¬¬P ✓	Q	1 →
5.	P	×	4 ¬¬
	×		

6. $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$ è valida.

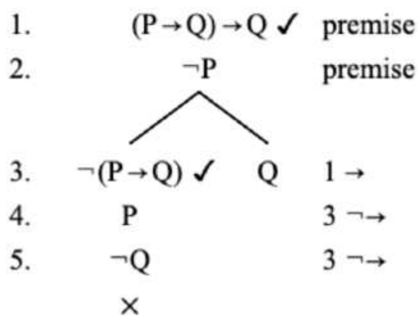
1.	P→Q ✓			premise
2.	Q→R ✓			premise
3.	P			premise
4.	¬R			premise
5.	¬P	Q		1 →
	×			
6.		¬Q	R	2 →
		×	×	

7. $\neg\neg Q \to P, P \vdash Q$ non è valida.



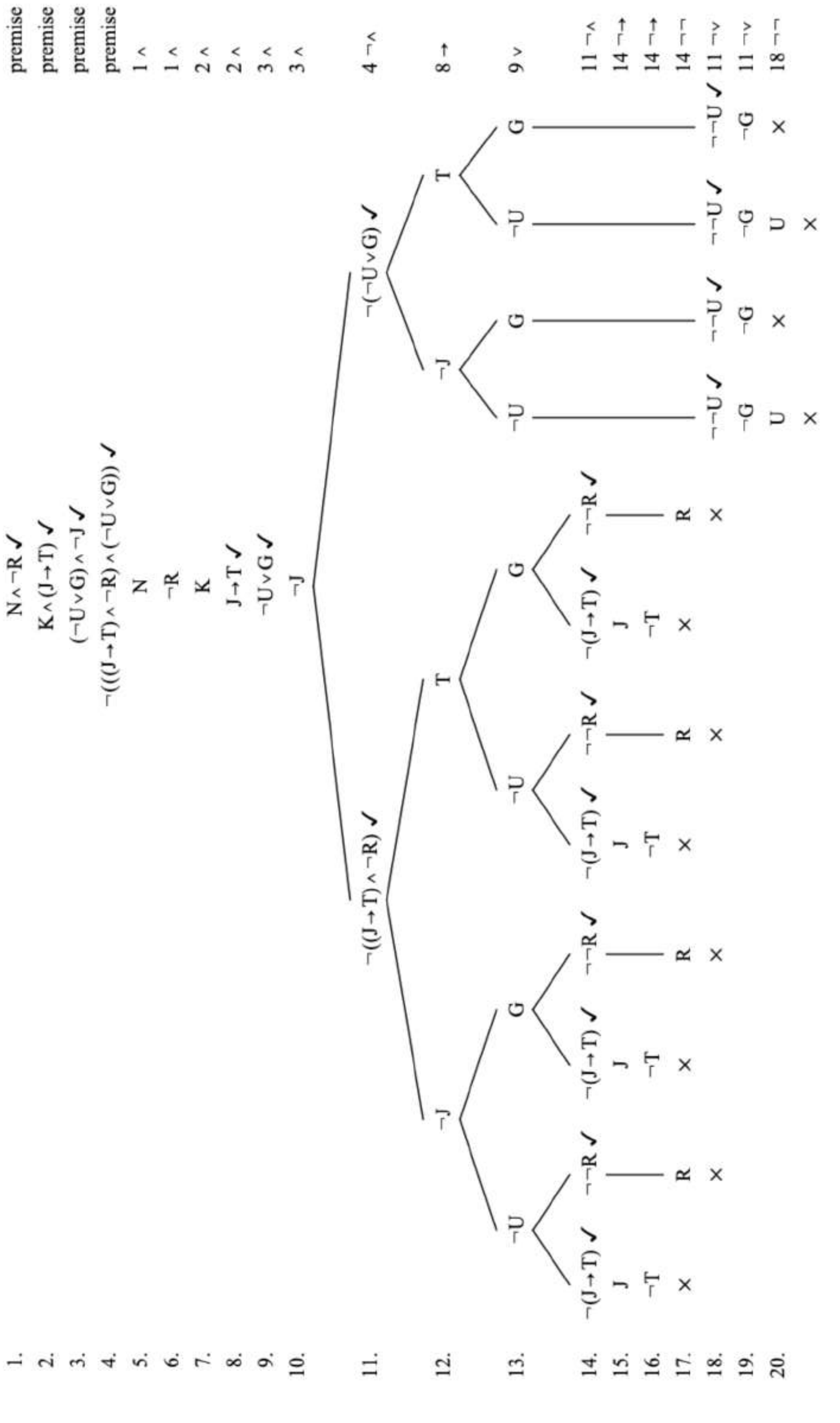
Controesempio: $v \vDash_0 Q$ e $v \vDash_1 P$

8. $(P \to Q) \to Q \vdash P$ non è valida.

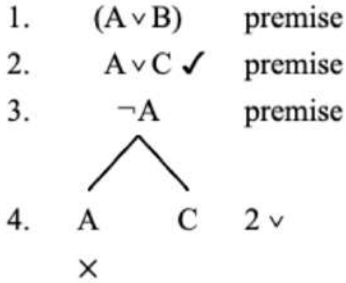


Controesempio: $v \vDash_1 Q$ e $v \vDash_0 P$

9. $N \wedge \neg R, K \wedge (J \to T), (\neg U \vee G) \wedge \neg J \vdash ((J \to T) \wedge \neg R) \wedge (\neg U \vee G)$ è valida.

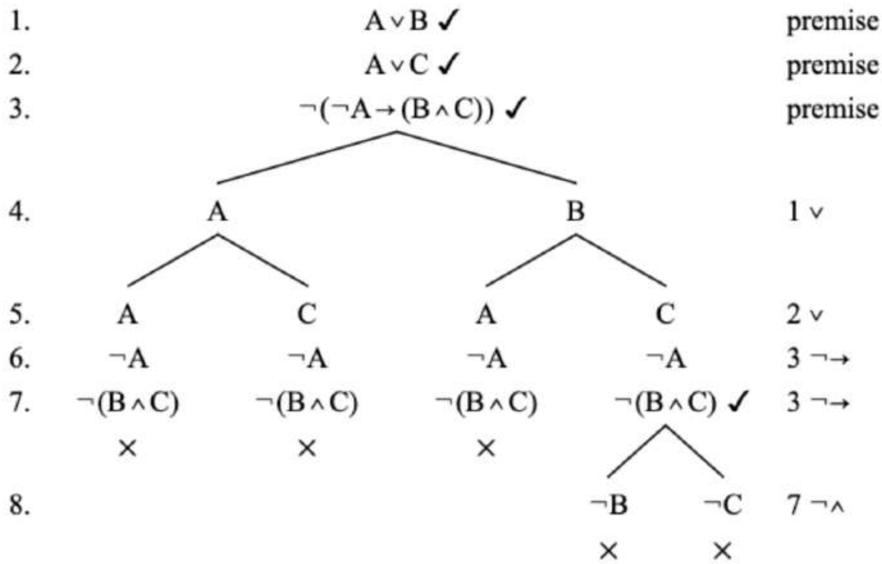


10. $(A \vee B), (A \vee C) \vdash A$ non è valida.

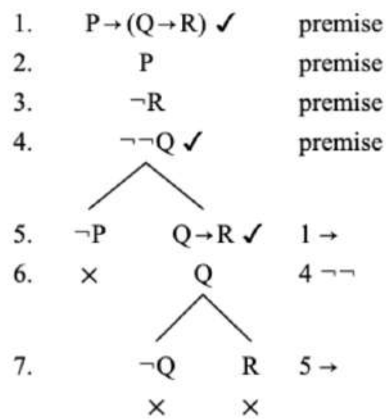


Controesempio: $v \vDash_0 A$, $v \vDash_0 B$ e $v \vDash_1 C$

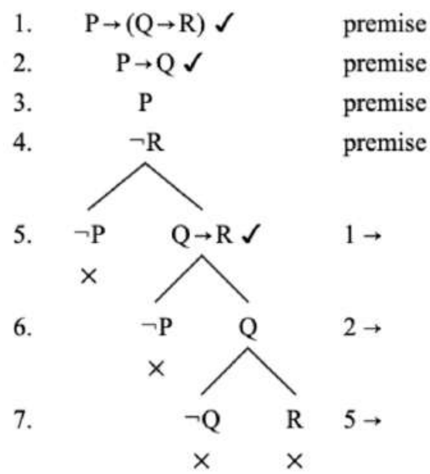
11. $(A \vee B), (A \vee C) \vdash \neg A \rightarrow (B \wedge C)$ è valida.



12. $P \to (Q \to R), P, \neg R \vdash \neg Q$ è valida.



13. $P \to (Q \to R), P \to Q, P \vdash R$ è valida.



Esercizio 23

Scrivere nel linguaggio della logica proposizionale i seguenti argomenti ottenendo delle sequenze. Determinare se le sequenze sono valide usando gli alberi di refutazione.

1. Se Pino ha vinto la corsa campestre, allora Nino è arrivato secondo oppure Gino è arrivato terzo. Gino non è arrivato terzo. Quindi, se Nino non è arrivato secondo, allora Pino non ha vinto la corsa campestre.

2. Se Pino ha vinto la corsa campestre, allora Nino è arrivato secondo oppure Gino è arrivato terzo. Nino è arrivato secondo. Quindi, se Pino ha vinto la corsa campestre, allora Gino non è arrivato terzo.

3. Se Pino ha vinto la corsa campestre, allora Nino è arrivato secondo e Gino è arrivato terzo. Nino non è arrivato secondo. Quindi, Pino non ha vinto la corsa campestre.

4. Se Pino ha vinto la corsa campestre, allora, se Nino è arrivato secondo, allora Gino è arrivato terzo. Nino non è arrivato secondo. Quindi, o Pino ha vinto o Gino è arrivato terzo.

5. Se farà bel tempo andremo a fare una passeggiata sul Montello. Se staremo in casa giocheremo a Monopoli. O andremo a fare una passeggiata sul Montello o staremo in casa. Quindi, o farà bel tempo o giocheremo a Monopoli.

6. Se l'investimento dei capitali rimane costante, allora cresceranno le spese del governo oppure si verificheranno fenomeni di disoccupazione. Se non aumenteranno le spese di governo, potranno essere ridotte le tasse. Se le tasse potranno essere ridotte e l'investimento dei capitali rimane costante, non si avranno fenomeni di disoccupazione. Quindi aumenteranno le spese del governo.

7. Settembre, Aprile e Novembre hanno 30 giorni. Aprile ha 30 giorni se e solo se Maggio non ha 30 giorni, e se Novembre ha 30 giorni allora anche Maggio ha 30 giorni. Dunque, Febbraio ha 40 giorni.

8. I computer possono pensare se e solo se possono avere emozioni. Se i computer possono avere emozioni, allora possono anche avere desideri. Ma i computer non possono pensare se hanno desideri. Dunque, i computer non possono pensare.

Soluzione:

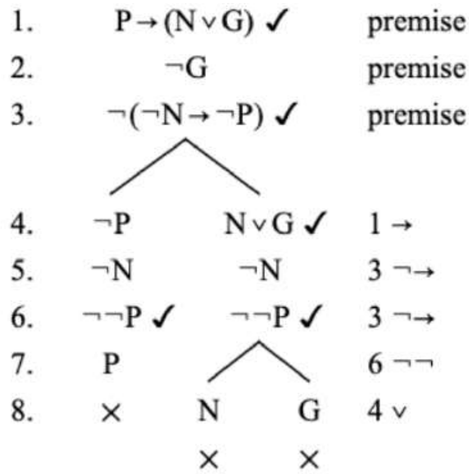
1. Se Pino ha vinto la corsa campestre, allora Nino è arrivato secondo oppure Gino è arrivato terzo. Gino non è arrivato terzo. Quindi, se Nino non è arrivato secondo, allora Pino non ha vinto la corsa campestre.

   P = «Pino ha vinto la corsa campestre»

   N = «Nino è arrivato secondo»

   G = «Gino è arrivato terzo»

L’argomento è rappresentato dalla sequenza $P \to (N \vee G), \neg G \vDash \neg N \to \neg P$, che è una sequenza valida.



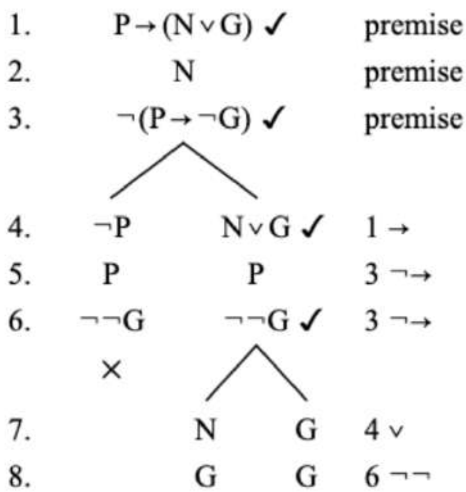
2. Se Pino ha vinto la corsa campestre, allora Nino è arrivato secondo oppure Gino è arrivato terzo. Nino è arrivato secondo. Quindi, se Pino ha vinto la corsa campestre, allora Gino non è arrivato terzo.

   P = «Pino ha vinto la corsa campestre»

   N = «Nino è arrivato secondo»

   G = «Gino è arrivato terzo»

   L’argomento è rappresentato dalla sequenza $P \to (N \vee G), N \vDash P \to \neg G$, che non è una sequenza valida.



3. Se Pino ha vinto la corsa campestre, allora Nino è arrivato secondo e Gino è arrivato terzo. Nino non è arrivato secondo. Quindi, Pino non ha vinto la corsa campestre.

   P = «Pino ha vinto la corsa campestre»

   N = «Nino è arrivato secondo»

   G = «Gino è arrivato terzo»

   L'argomento è rappresentato dalla sequenza $P \to (N \land G), \neg N \vDash \neg P$, che è una sequenza valida.

1.	$P \to (N \land G)$ ✓		premise
2.	$\neg N$		premise
3.	$\neg(\neg P)$ ✓		premise
4.	$\neg P$	$N \land G$ ✓	$1 \to$
5.	P	P	$3\ \neg\neg$
6.	×	N	$4 \land$
7.		G	$4 \land$
		×	

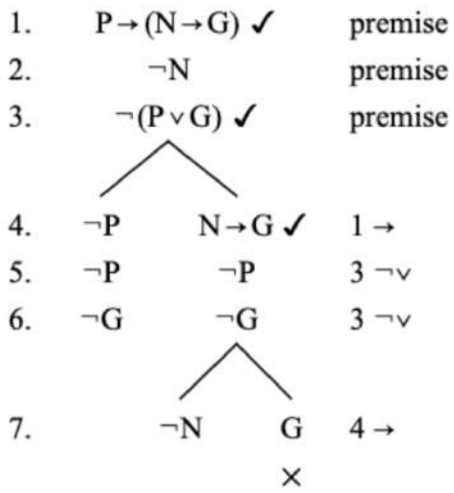
4. Se Pino ha vinto la corsa campestre, allora, se Nino è arrivato secondo, allora Gino è arrivato terzo. Nino non è arrivato secondo. Quindi, o Pino ha vinto o Gino è arrivato terzo.

   P = «Pino ha vinto la corsa campestre»

   N = «Nino è arrivato secondo»

   G = «Gino è arrivato terzo»

   L'argomento è rappresentato dalla sequenza $P \to (N \to G), \neg N \vDash P \lor G$, che non è una sequenza valida. (Si noti che in questa soluzione abbiamo optato per la lettura inclusiva della disgiunzione nella conclusione, che peraltro è un po' impropria vista la presenza di «o ... o ...». L'alternativa è interpretare la disgiunzione in modo esclusivo. In questo caso, la sequenza diventerebbe $P \to (N \to G), \neg N \vDash (P \lor G) \land \neg(P \land G)$)



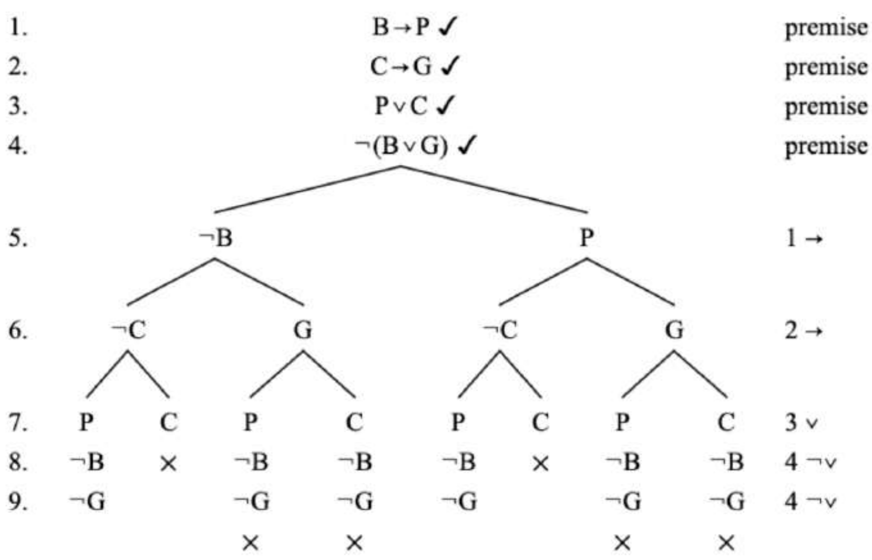
5. Se farà bel tempo andremo a fare una passeggiata sul Montello. Se staremo in casa giocheremo a Monopoli. O andremo a fare una passeggiata sul Montello o staremo in casa. Quindi, o farà bel tempo o giocheremo a Monopoli.

   B = «farà bel tempo» C = «staremo in casa»

   P = «andremo a fare una passeggiata sul Montello»

   G = «giocheremo a Monopoli»

   L'argomento è rappresentato dalla sequenza $B \to P, C \to G, P \vee C \vDash B \vee G$, che non è una sequenza valida.



6. Se l'investimento dei capitali rimane costante, allora cresceranno le spese del governo oppure si verificheranno fenomeni di disoccupazione. Se non aumenteranno le spese di governo, potranno essere ridotte le tasse. Se le tasse potranno essere ridotte e l'investimento dei capitali rimane costante, non si avranno fenomeni di disoccupazione. Quindi aumenteranno le spese del governo.

   I = «l'investimento dei capitali rimane costante»

   C = «cresceranno le spese del governo»

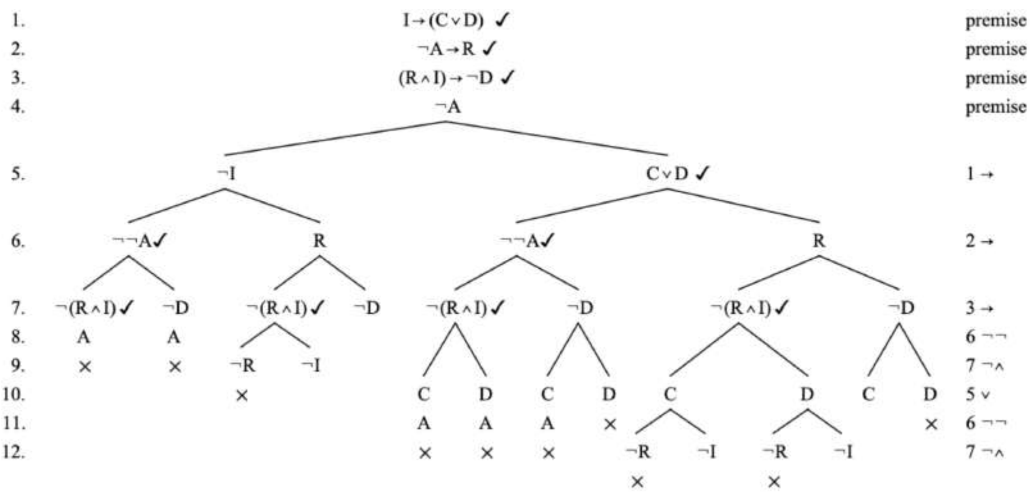
   D = «si verificheranno fenomeni di disoccupazione»

   A = «aumenteranno le spese di governo»

   R = «potranno essere ridotte le tasse»

   L'argomento è rappresentato dalla sequenza:

   $I \to (C \vee D), \neg A \to R, (R \wedge I) \to \neg D \vDash A$, che non è una sequenza valida.



7. Settembre, Aprile e Novembre hanno 30 giorni. Aprile ha 30 giorni se e solo se Maggio non ha 30 giorni, e se Novembre ha 30 giorni allora anche Maggio ha 30 giorni. Dunque, Febbraio ha 40 giorni.

   S = «Settembre ha 30 giorni»

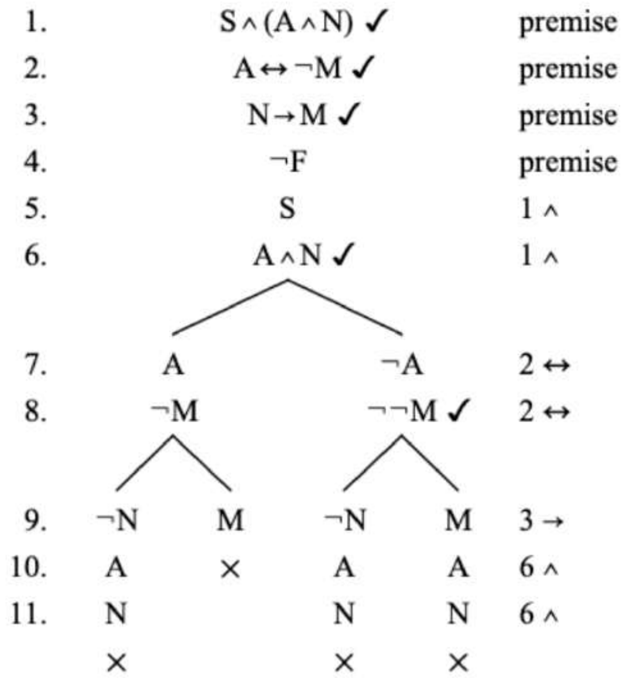
   A = «Aprile ha 30 giorni»

   N = «Novembre ha 30 giorni»

   M = «Maggio ha 30 giorni»

   F = «Febbraio ha 40 giorni»

L'argomento è rappresentato dalla sequenza $S \wedge A \wedge N, A \leftrightarrow \neg M, N \rightarrow M \vDash F$, che è una sequenza valida.



Questo esercizio merita qualche commento. La sequenza è valida dal momento che, come dimostra l'albero di refutazione, non è mai il caso che se le premesse sono tutte vere, la conclusione è falsa. Tuttavia, dovrebbe risultare intuitivo che questo ragionamento ha qualcosa che non va. Siamo in presenza di una cosiddetta *fallacia di pertinenza*, dal momento che la conclusione risulta completamente slegata dalle premesse. Come mai, allora, la sequenza risulta valida? Risposta: perché l'insieme delle premesse è inconsistente. Questo significa che queste premesse non possono mai essere tutte contemporaneamente vere.

Ora, se un sottoinsieme di ffbf è inconsistente, qualsiasi insieme di ffbf che include quel sottoinsieme risulterà anch'esso inconsistente. Pertanto, l'impossibilità che tutte le premesse siano vere e la conclusione falsa non si verifica in virtù del fatto che la conclusione segue logicamente dalle premesse, ma dal fatto che le premesse non possono essere tutte vere contemporaneamente. Allora, il criterio di validità logica è soddisfatto, ma per una ragione triviale (l'inconsistenza delle premesse), che rende questo argomento non-fondato (l'argomento non è sound).

8. I computer possono pensare se e solo se possono avere emozioni. Se i computer possono avere emozioni, allora possono anche avere desideri. Ma

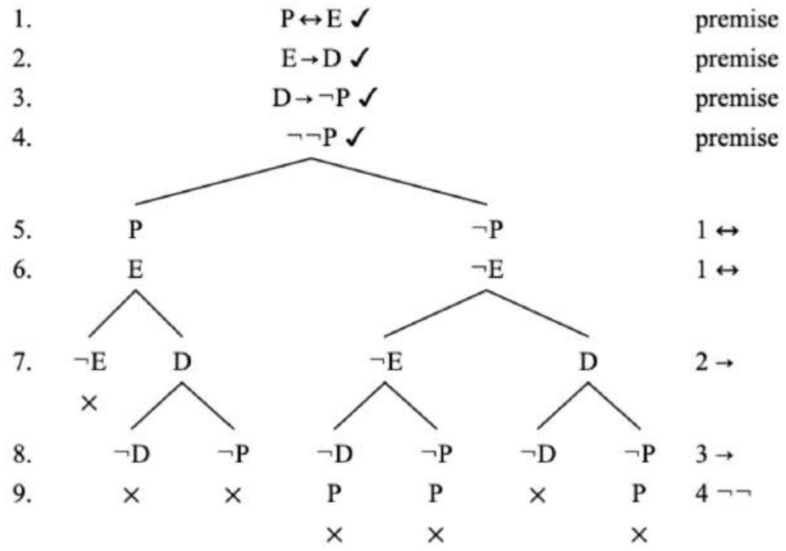
i computer non possono pensare se hanno desideri. Dunque, i computer non possono pensare.

P = «I computer possono pensare»

E = «I computer possono avere emozioni»

D = «I computer possono avere desideri»

L'argomento è rappresentato dalla sequenza $P \leftrightarrow E, E \to D, D \to \neg P \vDash \neg P$, che è una sequenza valida.



Esercizio 24

Quali delle seguenti ffbf sono conseguenza logica delle premesse $A \vee B$ e $A \vee C$? Verificatelo usando gli alberi di refutazione.

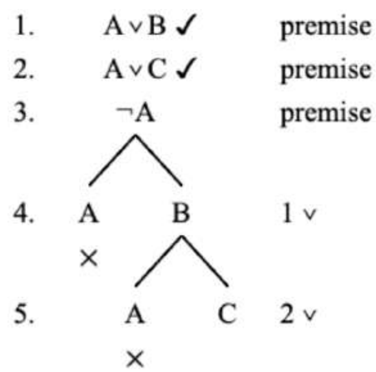
- A
- $B \vee C$
- $\neg A \to (B \wedge C)$
- $(B \wedge C) \to \neg A$
- $(\neg C \to A) \wedge (\neg B \to A)$

- $A \leftrightarrow A$

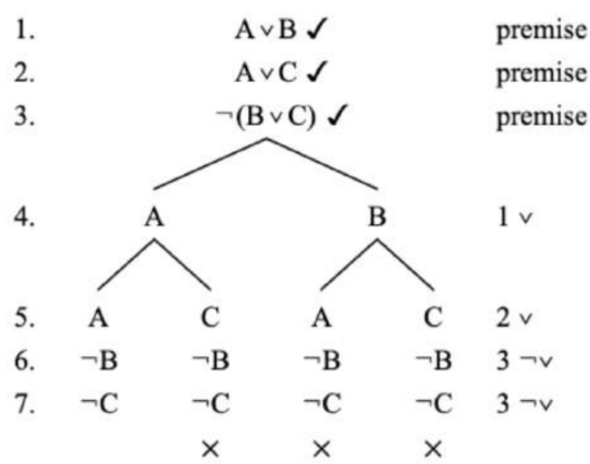
Soluzione:

Per rispondere alla domanda bisogna costruire un albero per ciascuna delle ffbf date, includendo $A \vee B$, $A \vee C$ e la negazione della fbf considerata di volta in volta. Se l'albero risulta chiuso, allora la fbf è conseguenza logica di $A \vee B$ e $A \vee C$.

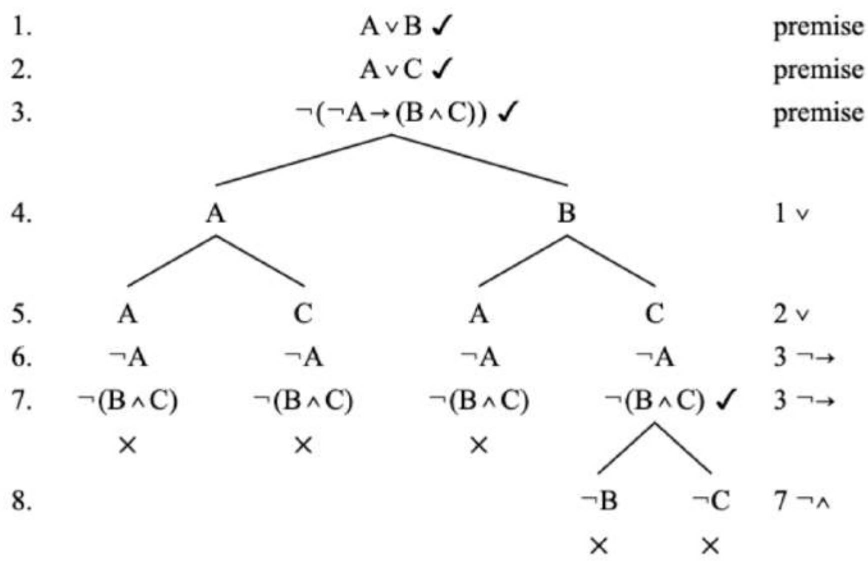
- A non è conseguenza logica di $A \vee B$ e $A \vee C$.



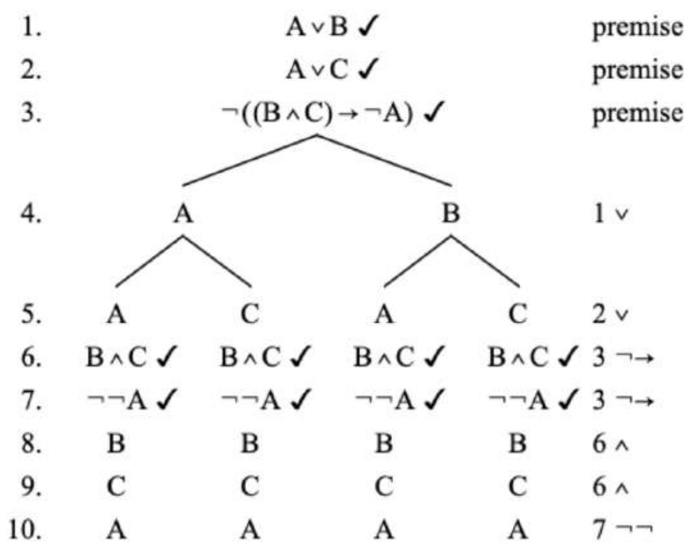
- $B \vee C$ non è conseguenza logica di $A \vee B$ e $A \vee C$.



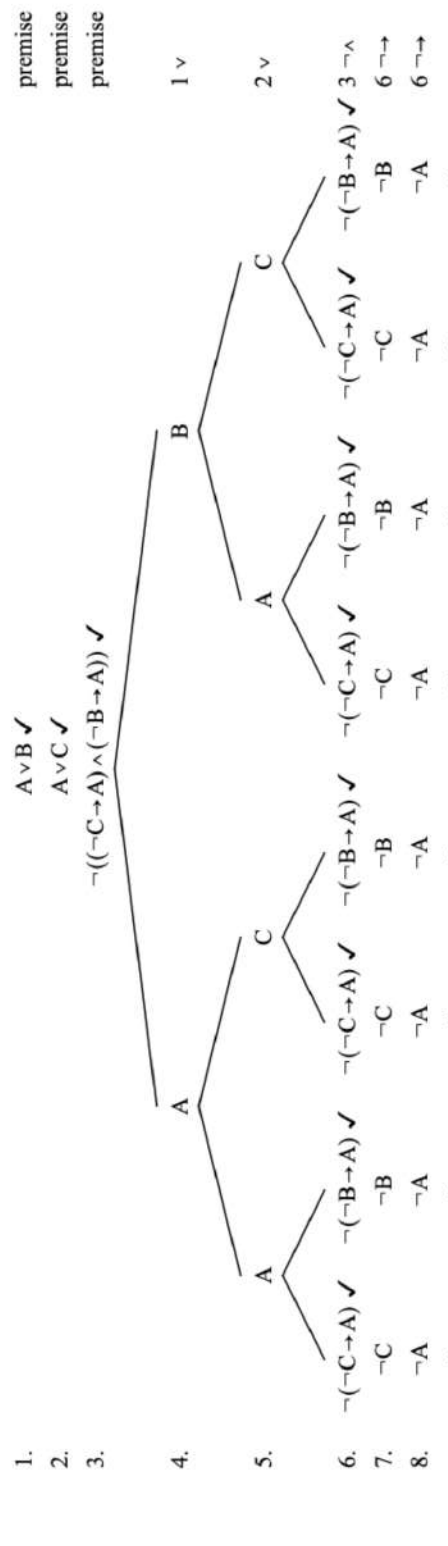
- $\neg A \to (B \wedge C)$ è conseguenza logica di $A \vee B$ e $A \vee C$.



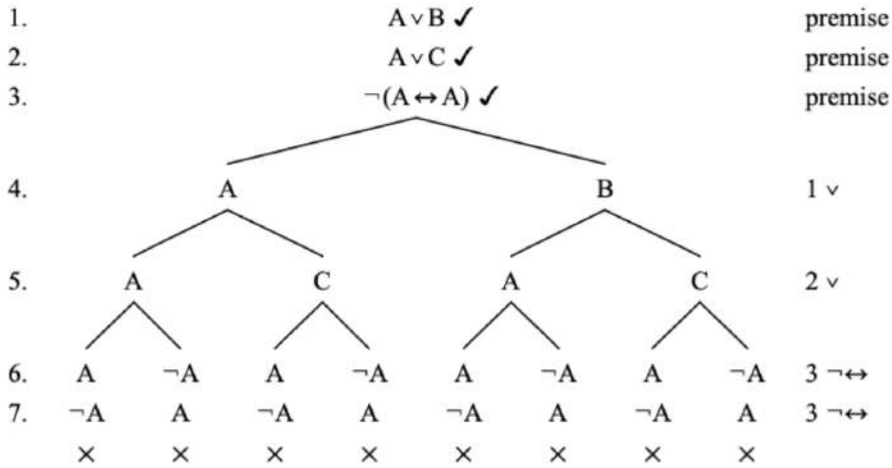
- $(B \wedge C) \to \neg A$ non è conseguenza logica di $A \vee B$ e $A \vee C$.



- $(\neg C \to A) \land (\neg B \to A)$ è conseguenza logica di $A \lor B$ e $A \lor C$.



- $A \leftrightarrow A$ è conseguenza logica di $A \vee B$ e $A \vee C$.



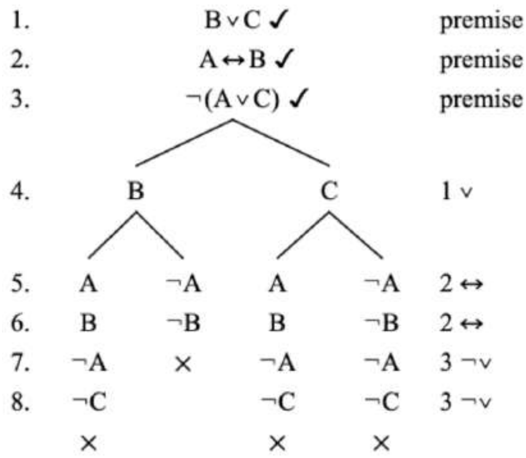
Esercizio 25

Verificare se la fbf a sinistra è conseguenza logica delle ffbf a destra usando gli alberi:

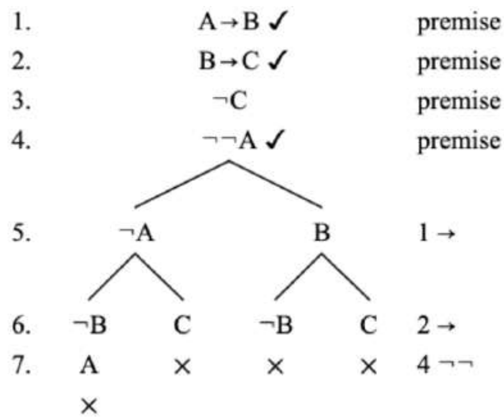
$A \vee C$	$B \vee C, A \leftrightarrow B$
$\neg A$	$A \to B, B \to C, \neg C$
B	$A \vee \neg C, A \to B, C$
$A \to C$	$(A \to B) \to C, A \to \neg B$
$A \to \neg C$	$A \to \neg B, \neg B \to \neg C$
E	$\neg(A \wedge B), (\neg A \wedge \neg B) \to (C \wedge D), D \to E$
$B \vee C$	$A \to B, C \to D, A \vee D$
$\neg A \vee \neg B$	$A \to (B \to \neg A), A \leftrightarrow B$
$C \to C$	$A \to (B \vee C), \neg B \to (C \wedge \neg D)$
$\neg B \to C$	$A \vee \neg B, \neg(\neg C \wedge \neg D), \neg(\neg A \wedge \neg D)$
$A \vee (\neg C \leftrightarrow B)$	$A \vee B, A \to \neg C$

Soluzione:

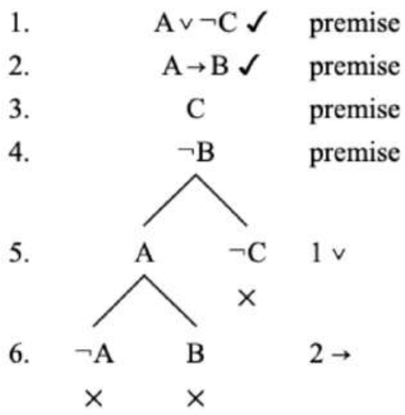
1. $A \vee C$ è conseguenza logica di $B \vee C, A \leftrightarrow B$



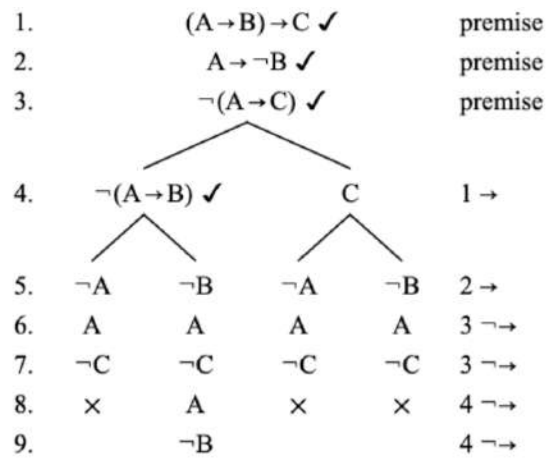
2. $\neg A$ è conseguenza logica di $A \to B, B \to C, \neg C$



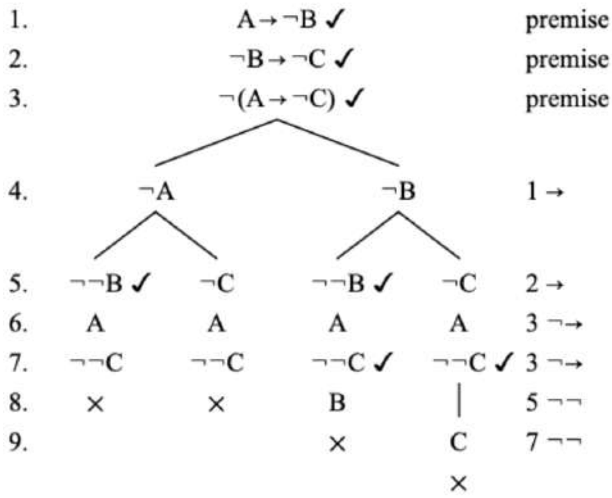
3. B è conseguenza logica di $A \vee \neg C, A \rightarrow B, C$



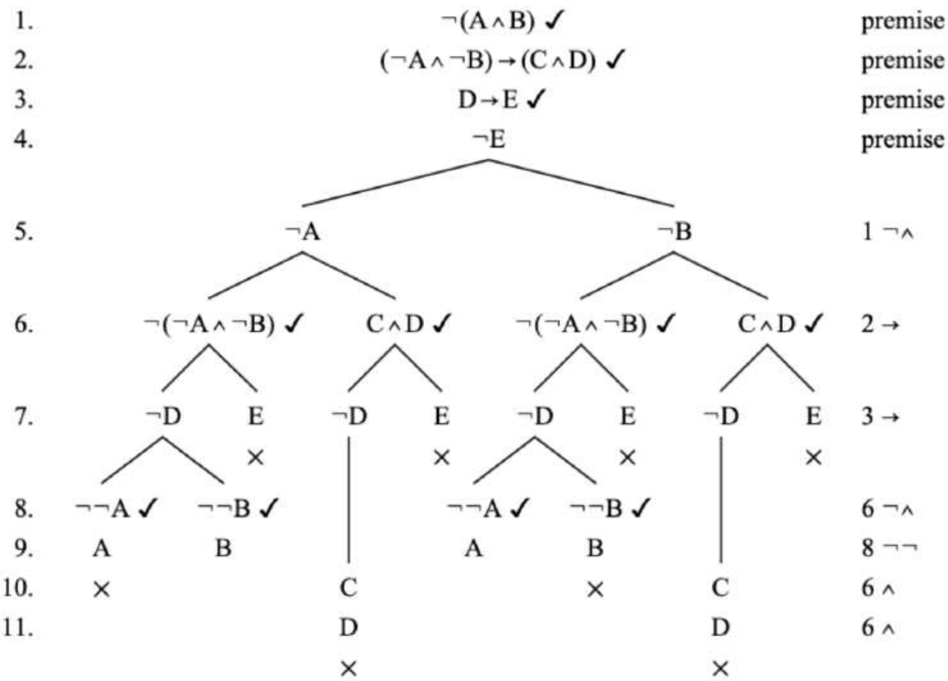
4. $A \rightarrow C$ non è conseguenza logica di $(A \rightarrow B) \rightarrow C, A \rightarrow \neg B$



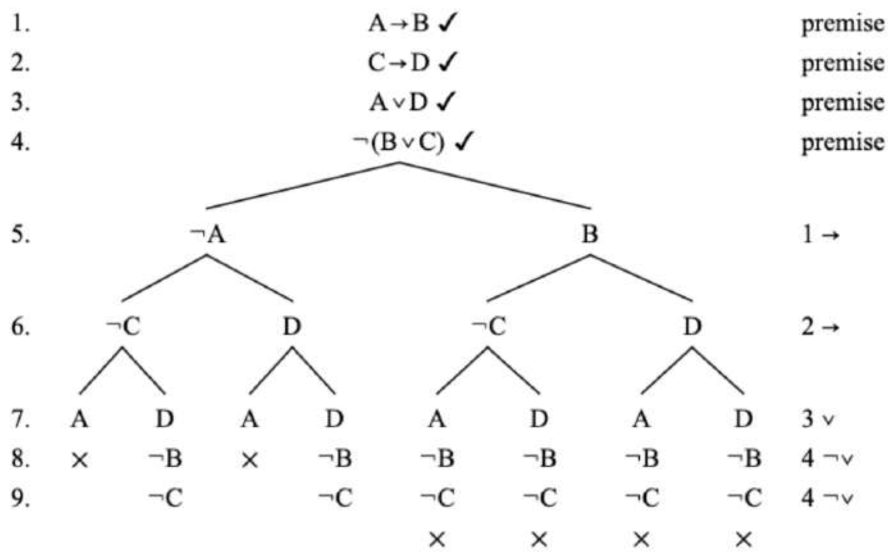
5. $A \to \neg C$ è conseguenza logica di $A \to \neg B, \neg B \to \neg C$



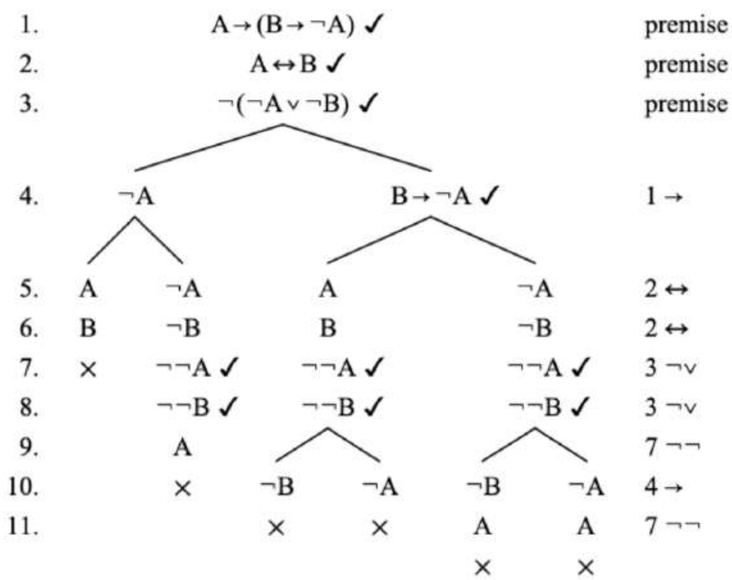
6. E non è conseguenza logica di $\neg(A \wedge B), (\neg A \wedge \neg B) \to (C \wedge D), D \to E$



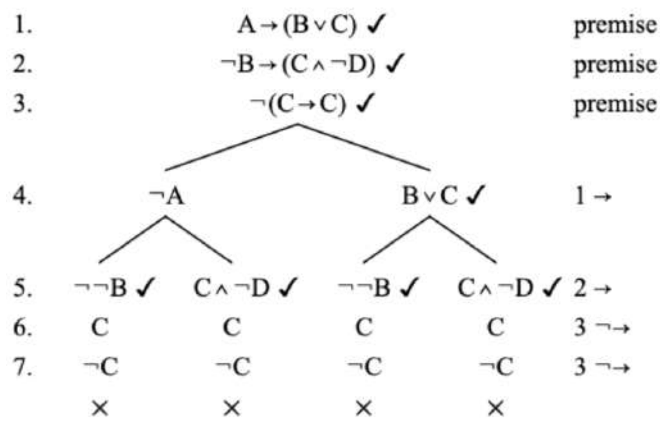
7. $B \vee C$ non è conseguenza logica di $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee D$



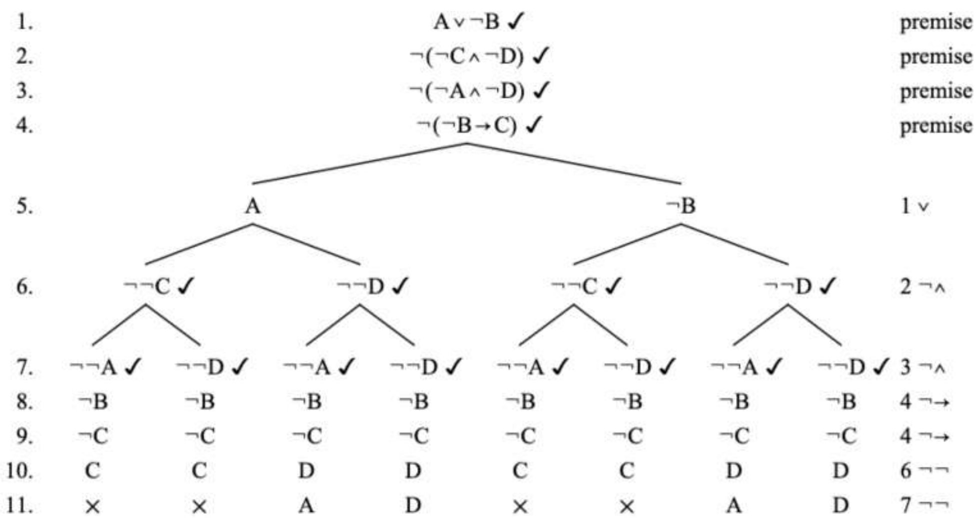
8. $\neg A \vee \neg B$ è conseguenza logica di $A \rightarrow (B \rightarrow \neg A), A \leftrightarrow B$



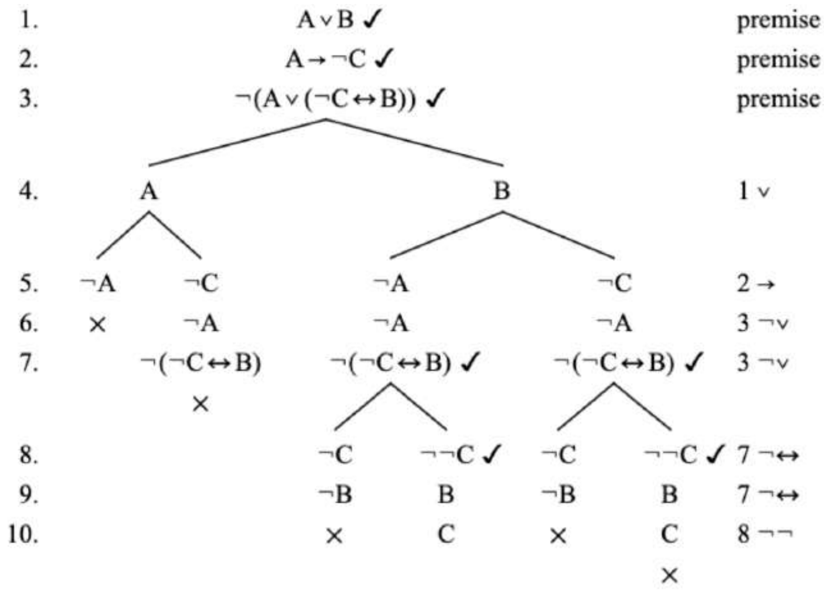
9. $C \to C$ è conseguenza logica di $A \to (B \vee C), \neg B \to (C \wedge \neg D)$



10. $\neg B \to C$ non è conseguenza logica di $A \vee \neg B, \neg(\neg C \wedge \neg D), \neg(\neg A \wedge \neg D)$



11. $A \vee (\neg C \leftrightarrow B)$ non è conseguenza logica di $A \vee B, A \rightarrow \neg C$



Esercizio 26

Se sono conseguenze logiche, date le dimostrazioni semantiche delle seguenti sequenze, altrimenti fornitene un controesempio usando gli alberi di refutazione:

1. $A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B \vDash B$
2. $Q \wedge R \vDash R \wedge Q$
3. $K \rightarrow U, S \wedge H \vDash U$
4. $K \vDash B \vee (K \vee G)$
5. $S \wedge (\neg T \wedge (K \wedge \neg F)) \vDash K$
6. $\neg P \rightarrow Q, \neg Q \vDash P$
7. $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vDash R$
8. $\neg\neg Q \rightarrow P, P \vDash Q$
9. $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \vDash P$
10. $(A \vee B), (A \vee C) \vDash A$

11. $(A \vee B), (A \vee C) \vDash \neg A \to (B \wedge C)$
12. $P \to (Q \to R), P, \neg R \vDash \neg Q$
13. $P \to (Q \to R), P \to Q, P \vDash R$

Soluzione:

1. $A \to B, \neg A \to B \vDash B$

   Supponiamo che $v(A \to B) = 1$ e $v(\neg A \to B) = 1$. Per *reductio*, supponiamo poi che $v(B) = 0$. Allora, per le condizioni dell'implicazione materiale applicate alle due premesse, $v(A) = 0$ e $v(A) = 1$, che è contraddittorio. Quindi, $v(B) = 1$.

2. $Q \wedge R \vDash R \wedge Q$

   Supponiamo che $v(Q \wedge R) = 1$. Allora, per le condizioni della congiunzione, $v(Q) = 1$ e $v(R) = 1$. Ora, supponiamo per *reductio* che $v(R \wedge Q) = 0$. Per le condizioni della congiunzione questo comporta che $v(Q) = 0$ o $v(R) = 0$. In entrambi i casi si arriva ad una contraddizione. Quindi $v(R \wedge Q) = 1$.

3. $K \to U, S \wedge H \vDash U$

   Assumiamo $v(S \wedge H) = 1$. Quindi, per le condizioni della congiunzione, $v(H) = 1$. Assumiamo la seconda premessa, ovvero $v(K \to U) = 1$. Per le condizioni dell'implicazione materiale, se un condizionale e il suo antecedente sono veri, deve esserlo anche il conseguente. Dunque, $v(U) = 1$.

4. $K \vDash B \vee (K \vee G)$

   Assumiamo $v(K) = 1$. Per le condizioni della disgiunzione, segue che anche $v(K \vee G) = 1$. Per le stesse ragioni, anche $v(B \vee (K \vee G)) = 1$.

5. $S \wedge (\neg T \wedge (K \wedge \neg F)) \vDash K$

   Assumiamo $v(S \wedge (\neg T \wedge (K \wedge \neg F))) = 1$. Per le condizioni della congiunzione, segue che $v(\neg T \wedge (K \wedge \neg F)) = 1$, dunque che $v(K \wedge \neg F) = 1$, dunque che $v(K) = 1$.

6. $\neg P \to Q, \neg Q \vDash P$

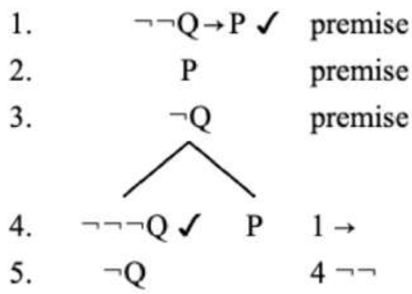
Assumiamo $v(\neg P \to Q) = 1$ e $v(\neg Q) = 1$, da cui, per le condizioni della negazione, segue che $v(Q) = 0$. Supponiamo, per *reductio*, che $v(P) = 0$. Allora, $v(\neg P) = 1$ e, per le condizioni dell'implicazione materiale, $v(Q) = 1$. Abbiamo raggiunto una contraddizione, poiché dovrebbe essere il caso che $v(Q) = 1$ e $v(Q) = 0$. Dunque, $v(P) = 1$.

7. $P \to Q, Q \to R, P \vDash R$

Assumiamo $v(P \to Q) = 1$, $v(Q \to R) = 1$ e $v(P) = 1$. Per le condizioni dell'implicazione materiale, segue che $v(Q) = 1$ e, successivamente, che $v(R) = 1$.

8. $\neg\neg Q \to P, P \vDash Q$

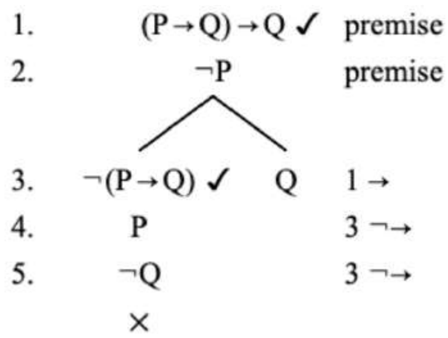
Non sussiste la relazione di conseguenza logica tra le premesse e la conclusione. Dimostriamolo con l'albero di refutazione.



Il controesempio è dato da $v(P) = 1$ e $v(Q) = 0$.

9. $(P \to Q) \to Q \vDash P$

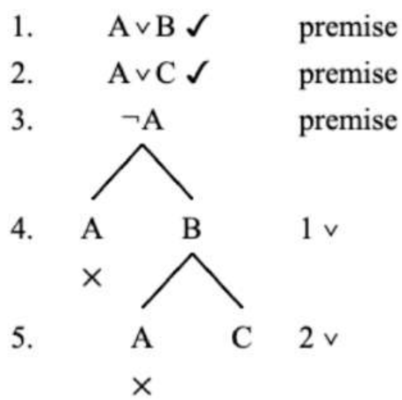
Non sussiste la relazione di conseguenza logica tra le premesse e la conclusione. Dimostriamolo con l'albero di refutazione.



Il controesempio è dato da $v(P) = 0$ e $v(Q) = 1$.

10. $(A \vee B), (A \vee C) \vDash A$

Non sussiste la relazione di conseguenza logica tra le premesse e la conclusione. Dimostriamolo con l'albero di refutazione.



Il controesempio è dato da $v(A) = 0$, $v(B) = 1$ e $v(C) = 1$.

11. $(A \vee B), (A \vee C) \vDash \neg A \rightarrow (B \wedge C)$

Assumiamo $v(A \vee B) = 1$ e $v(A \vee C) = 1$. Per le condizioni della disgiunzione, abbiamo che $v(A) = 1$ o $v(B) = 1$, e che $v(A) = 1$ o $v(C) = 1$. Supponiamo, per *reductio*, che $v(\neg A \rightarrow (B \wedge C)) = 0$. Allora, per le condizioni dell'implicazione segue che $v(\neg A) = 1$ e $v(B \wedge C) = 0$. Per le condizioni della congiunzione, segue che $v(B) = 0$ o $v(C) = 0$. Supponiamo che $v(B) = 0$. Allora, per le condizioni precedenti segue che $v(A) = 1$ e si giunge ad una contraddizione, siccome $v(A) = 0$ e $v(A) = 1$. Allora, supponiamo che $v(C) = 0$. Sempre per le condizioni precedenti, segue ancora che $v(A) = 1$

e si giunge nuovamente ad una contraddizione. In conclusione, la supposizione fatta per *reductio* deve essere falsa, ovvero $v(\neg A \to (B \wedge C)) = 1$.

12. $P \to (Q \to R), P, \neg R \vDash \neg Q$

    Assumiamo $v(P \to (Q \to R)) = 1$, $v(P) = 1$ e $v(\neg R) = 1$. Da quest'ultima, per le condizioni della negazione abbiamo che $v(R) = 0$. Per le condizioni dell'implicazione, poi, segue che $v(Q \to R) = 1$. Supponiamo, per *reductio*, $v(\neg Q) = 0$. Allora, $v(Q) = 1$, e per le condizioni dell'implicazione segue che $v(R) = 1$. Ma in questo modo abbiamo una contraddizione, siccome $v(R) = 1$ e $v(R) = 0$. Dunque, $v(\neg Q) = 1$.

13. $P \to (Q \to R), P \to Q, P \vDash R$

    Assumiamo $v(P \to (Q \to R)) = 1$, $v(P \to Q) = 1$ e $v(P) = 1$. Per le condizioni dell'implicazione, segue che $v(Q \to R) = 1$ e $v(Q) = 1$, e da queste che $v(R) = 1$.

2.4 Puzzle logici

Esercizio 27

Avete tre persone: Alfio, Bettio e Cassio. Tutte e tre abitano nell'isola dei furfanti e dei cavalieri. I cavalieri dicono solo il vero, i furfanti solo il falso. Alfio e Bettio dicono rispettivamente:

1. (Alfio) «Siamo tutti furfanti»
2. (Bettio) «Solo uno di noi è un cavaliere»

Cosa sono Alfio, Bettio e Cassio? (Aiuto. Utilizzate le tavole di verità per risolvere il problema).

Soluzione:

Se Alfio è un cavaliere, ciò che dice deve essere vero. Ma se «Siamo tutti furfanti» è vero, allora è falso che Alfio è un cavaliere. Dunque, Alfio non può essere un cavaliere e quindi è un furfante.
Essendo un furfante, Alfio dice il falso. Questo significa che nel gruppo dei tre c'è almeno un cavaliere. Supponiamo che Cassio sia un cavaliere. Allora,

Bettio potrebbe essere un cavaliere o un furfante. Ma non può essere un cavaliere, perché se lui e Cassio sono cavalieri, allora l'asserto di Bettio risulta falso. Ma non può nemmeno essere un furfante, perché se così fosse risulterebbe che quello che dice è vero, mentre invece deve essere falso. Siccome entrambe le possibilità non sono compatibili con la supposizione che Cassio sia un cavaliere, concludiamo che Cassio è un furfante. Allora, se Cassio è un furfante, Bettio deve essere per forza un cavaliere, e ciò che dice risulta vero e del tutto coerente.

Esercizio 28

Le solite tre persone: Alfio, Bettio e Cassio. Tutte e tre abitano nell'isola dei furfanti e dei cavalieri. I cavalieri dicono solo il vero, i furfanti solo il falso. Alfio e Bettio fanno la seguente affermazione:

1. (Alfio) «Siamo tutti furfanti»

2. (Bettio) «Solo uno di noi è un furfante»

Si può determinare cos'è Bettio? Si può determinare cos'è Cassio? (Aiuto. Utilizzate le tavole di verità per risolvere il problema).

Soluzione:

Per lo stesso ragionamento dell'esercizio precedente, Alfio deve essere un furfante e nel gruppo dei tre ci deve essere almeno un cavaliere.
Ora, supponiamo che Bettio sia un cavaliere. Allora, in virtù del fatto che ciò che dice è vero, anche Cassio deve essere un cavaliere. Se, invece, supponiamo che Bettio sia un furfante, allora ciò che dice è falso, quindi nel gruppo ci sarebbero due furfanti e un cavaliere, che è Cassio.
In conclusione, entrambi gli scenari mostrati:

(1) Alfio = furfante; Bettio = cavaliere; Cassio = cavaliere;

(2) Alfio = furfante; Bettio = furfante; Cassio = cavaliere;

sono coerenti. Quindi non è possibile determinare con certezza cos'è Bettio, mentre si può dire che Cassio è sicuramente un cavaliere.

Esercizio 29

Supponiamo, poi, che Alfio dica:

(Alfio) «Io sono un furfante ma Bettio non lo è»

Cosa sono Alfio e Bettio?

Soluzione:

Supponiamo che Alfio sia un cavaliere. In tal caso, ciò che dice è vero. Ma egli dice di essere un furfante, e si giunge, dunque, ad una contraddizione. Quindi, Alfio è un furfante. Quindi, «Io sono un furfante ma Bettio non lo è» è falso. Ma questo enunciato è la congiunzione di due enunciati: «Io sono un furfante» e «Bettio non è un furfante». Dunque, affinché «Io sono un furfante ma Bettio non lo è» sia falso, bisogna che almeno uno dei due congiunti sia falso. Ma sappiamo che «Io sono un furfante» è vero. Di conseguenza, «Bettio non è un furfante» deve essere falso. Pertanto, Bettio è un furfante.

Esercizio 30

Supponiamo che in quest'isola ci siano lupi mannari. Incontrate Alfio e Bettio. Dicono:

(Alfio) «Il lupo mannaro è un cavaliere»

(Bettio) «Il lupo mannaro è un furfante»

Preso un qualsiasi individuo dell'isola, egli è o cavaliere o furfante, e o è un lupo mannaro, o non lo è. Inoltre, sapete che tra Alfio e Bettio si nasconde un lupo mannaro. Come è risaputo, i lupi mannari sono piuttosto pericolosi. Quindi, non vorremmo averli come compagni di viaggio. Allora: chi scegliereste come compagno di viaggio tra Alfio e Bettio?

Soluzione:

Supponiamo che Alfio sia un cavaliere. Allora, «Il lupo mannaro è un cavaliere» è vero. Dunque, Alfio è quantomeno un sospetto lupo mannaro. A questo punto, supponiamo che Bettio sia un cavaliere. In questo caso, «Il lupo mannaro è un furfante» dovrebbe essere vero, ma se lo fosse, ci sarebbe una contraddizione, dal momento che il lupo mannaro dovrebbe essere un cavaliere. Dunque, se Alfio è un cavaliere, Bettio non può essere un cavaliere. Allora, se Alfio è un cavaliere, Bettio è un furfante. Di conseguenza, «Il lupo

mannaro è un furfante» è falso, il che implica che il lupo mannaro è un cavaliere. In conclusione: se Alfio è un cavaliere, allora è anche un lupo mannaro, mentre Bettio è un furfante, ma non un lupo mannaro.
Tuttavia, rimane da considerare il caso in cui Alfio sia un furfante. Se Alfio è un furfante, «Il lupo mannaro è un cavaliere» è falso. Questo significa che il lupo mannaro è un furfante, e Alfio è, allora, quantomeno un sospetto lupo mannaro. Ora, supponiamo che Bettio sia un furfante. Allora, «Il lupo mannaro è un furfante» è falso, quindi il lupo mannaro è un cavaliere. Ma questo è in contraddizione con ciò che deriva dall'assunzione che Alfio sia un furfante. Quindi, se Alfio è un furfante, Bettio deve essere un cavaliere. Allora, «Il lupo mannaro è un furfante» è vero e, dunque, deve essere Alfio. In conclusione: se Alfio è un furfante, allora è anche lupo mannaro, mentre Bettio è un cavaliere e non è un lupo mannaro.

Dalle due conclusioni precedenti segue che il compagno di viaggio da scegliere è Bettio!

Esercizio 31

Sull'isola dei furfanti e cavalieri incontri Alfio che ti dice:

(Alfio) «Io sono un furfante»

È una situazione possibile?

Soluzione:

No, è impossibile. Supponiamo che Alfio sia, in realtà, un cavaliere. Siccome i cavalieri dicono sempre la verità, Alfio dovrebbe essere un furfante come dice, e si ha una contraddizione. Supponiamo allora che Alfio sia un furfante. Allora quel che dice è falso. E se non è un furfante come dice, deve essere un cavaliere. In questo modo abbiamo di nuovo una contraddizione. (Si noti che abbiamo assunto che ognuno sia o un furfante o un cavaliere.)

Esercizio 32

Sull'isola dei furfanti e cavalieri ci sono tre persone, A, B, C. A dice: «B è un furfante». B dice: «A e C sono dello stesso tipo». Cos'è C?

Soluzione:

Supponiamo che A sia un furfante e B anche. Allora A ha detto la verità. Contraddizione. Quindi questa opzione è esclusa. Supponiamo allora che A e B siano cavalieri. Ma allora B non può essere un furfante come dice A. Contraddizione. Quindi anche questa opzione è esclusa.
Riguardo A e B, quindi le uniche possibilità sono due: A è un cavaliere e B è un furfante, oppure viceversa A è un furfante e B è un cavaliere. È impossibile stabilire quale delle due affermazioni sia vera e quale falsa. Se A è un cavaliere e B è un furfante, allora B è come dice A, ovvero un furfante. Dunque quel che dice B è falso, A e C non sono dello stesso tipo, e quindi C è un furfante. Se A è un furfante e B è un cavaliere, allora quel che dice B è vero. Quindi C è come A, ovvero un Furfante. In ogni caso, C è un furfante.

Esercizio 33

Ancora tre persone, A, B e C. A dice: «B e C sono dello stesso tipo». Qualcuno allora chiede a C: «A e B sono dello stesso tipo?». Cosa risponde C?

Soluzione:

C risponde sicuramente "sì".
Riguardo a cosa siano A, B e C, ci sono quattro possibilità: Se A è un cavaliere. Quel che dice A è vero. E quindi B e C sono o entrambe furfanti, o entrambe cavalieri.

A = cavaliere
B = cavaliere
C = cavaliere

A = cavaliere
B = furfante
C = furfante

Se A è un furfante, quel che dice A è falso. B e C non sono dello stesso tipo. B è un cavaliere e C un furfante, o viceversa.

A = furfante
B = cavaliere
C = furfante

A = furfante
B = furfante

C = cavaliere

Controllando ogni caso si vede che la risposta di C sarà sempre: «Sì». Ad esempio, nel secondo caso C è un furfante. A e B sarebbero di tipo diverso ma C, mentendo, risponde: «Sì».

Esercizio 34

Sull'isola dei cavalieri e dei furfanti incontrate due abitanti. Chiedete a uno di essi se l'altro è un cavaliere e come risposta ricevete un sì o un no. Poi chiedete al secondo se il primo è un cavaliere e di nuovo ottenete come risposta un sì o un no. Le due risposte sono necessariamente uguali?

Soluzione:

Sì, le due risposte sono necessariamente uguali.
Se il primo è un cavaliere e il secondo è un furfante, o se, viceversa il primo è un furfante e il secondo è un cavaliere, risponderanno entrambi «no». Se i due abitanti sono entrambi cavalieri, o se sono entrambi furfanti, risponderanno entrambi «sì». Se poi i due abitanti sono entrambi cavalieri, o se sono entrambi furfanti, risponderanno entrambi «sì».

Esercizio 35

Sull'isola dei furfanti e cavalieri si dice che vi sia sepolto dell'oro. Chiedete quindi ad uno degli abitanti, Alfio, se c'è oro su quest'isola. Egli dà la seguente risposta: «Sull'isola c'è oro se e solo se io sono un cavaliere».

a) Si può determinare se Alfio è un cavaliere o un furfante?
b) Si può determinare se c'è oro sull'isola?

Soluzione:

Indicando con P la proposizione «sull'isola c'è oro» e con Q la proposizione «Alfio è un cavaliere», la risposta fornita si formalizza con la proposizione composta R: $P \rightarrow Q$, la cui tavola di verità è la seguente:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Poiché i cavalieri dicono il vero e i furfanti mentono, il valore di verità della formula atomica Q deve coincidere con quello del connettivo (cioè se l'interlocutore è un cavaliere la proposizione deve essere vera; viceversa se è un furfante) e questo succede solo nelle prime due righe. Non è possibile stabilire quindi se stiamo parlando con un cavaliere o con un furfante. In entrambe i casi però sull'isola c'è dell'oro.

Esercizio 36

Sull'isola di furfanti e cavalieri incontri due persone: A e B. A dice: «Se io sono un cavaliere, allora lo è anche B». Si può determinare che cosa sono A e B?

Soluzione:

Indicando con P la proposizione «A è un cavaliere» e con Q «B è un cavaliere», la tavola di verità di $P \to Q$ è la seguente:

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Se A è un cavaliere, quel che dice è vero. Quindi, il condizionale $P \to Q$ deve essere vero (oltre ad essere vero l'antecedente P). L'opzione antecedente vero e condizionale falso è quindi esclusa. Rimane solo antecedente vero e condizionale vero (prima riga). Se A è un furfante, invece, quel che dice è falso. Quindi, il condizionale deve essere falso (oltre ad essere falso l'antecedente P). L'opzione antecedente falso e condizionale vero è quindi esclusa. Rimane solo antecedente falso e condizionale falso (nessuna riga). In conclusione, l'unica opzione possibile è che A e B siano entrambi cavalieri.

Esercizio 37

Sull'isola dei cavalieri e dei furfanti, ho incontrato due abitanti. A uno di loro chiedo: «Uno di voi due è un cavaliere?». Egli risponde e così scopro la risposta alla mia domanda. Cos'è la persona a cui ho fatto la domanda? E che cos'è l'altro?

Soluzione:

Indicando con P la proposizione «A è un cavaliere» e con Q «B è un cavaliere», la tavola di verità di $P \vee Q$ è la seguente:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Supponiamo che la domanda sia stata rivolta ad A (è indifferente). Se A risponde «sì», allora può essere un cavaliere (e B cavaliere o furfante), oppure un furfante (e B un furfante). Queste eventualità corrispondono a tre righe della tavola di verità e comportano possibilità che non permettono di conoscere la risposta alla domanda. Poiché tale risposta è invece nota (perché si dice che "scopro la risposta"), A deve aver risposto «No» e quindi A è un furfante e B è un cavaliere (caso rappresentato dalla quarta riga della tavola di verità).

Esercizio 38

Sull'isola, incontri due abitanti, A e B. Chiedi ad A : «Sei un cavaliere o un furfante?». A risponde: «O io sono un furfante oppure B è un cavaliere». Cosa sono A e B?

Soluzione:

p: A è un furfante

q: B è un cavaliere

A risponde: $p \vee q$

Supponiamo che A sia un furfante. Allora $p \vee q$ è falsa. Quindi p e q sono entrambe false, cioè p è falsa, e quindi A è un cavaliere. Contraddizione. Supponiamo che A sia un cavaliere. Allora $p \vee q$ è vera. Se A è un cavaliere, allora p è falsa. E quindi q deve essere vera. Quindi B è un cavaliere.

Quindi la soluzione è: A cavaliere e B cavaliere.

Esercizio 39

Sull'isola incontri due abitanti, A e B, e così chiedi ad A: «Sei un cavaliere o un furfante?». A risponde: «Almeno uno di noi due è un furfante». Cosa sono A e B?

Soluzione:

p: A è un furfante

q: B è un furfante

A risponde: $p \vee q$

Supponiamo che A sia un furfante. Allora $p \vee q$ è falsa. Quindi p e q sono entrambe false. Ma se p è falsa, allora A è un cavaliere. Contraddizione.

Supponiamo che A sia un cavaliere. Allora $p \vee q$ è vera. Ma se A è un cavaliere, p è falsa. Quindi q deve essere vera. Quindi B è un furfante. Quindi A è un cavaliere e B un furfante.

Esercizio 40

Sull'isola, incontri due abitanti, A e B, e così chiedi ad A e B: «Sei un cavaliere o un furfante?». A dice : «B è un furfante». B dice: «Siamo tutti e due cavalieri». Cosa sono A e B ?

Soluzione:

A dice p: B è un furfante
B dice q: A e B sono cavalieri
Supponiamo che A sia un furfante. Allora p è falsa. quindi B è cavaliere, e quindi q è vera. Quindi A è un cavaliere. Contraddizione.

Supponiamo allora che A sia un cavaliere. Allora p è vera. Quindi B furfante e q è falsa. Ma allora A è un cavaliere e B è un furfante. Quindi la soluzione è: A è cavaliere e B è un furfante.

Esercizio 41

Sull'isola incontri due abitanti, A e B, e così chiedi ad A: «Sei un cavaliere o un furfante?». A dice: «Siamo due furfanti». Cosa sono A e B?

Soluzione:

A dice p: A e B sono furfanti.

Supponiamo che A sia un furfante. Allora p è falsa, e quindi B è un cavaliere.
Supponiamo che A sia un cavaliere. Allora p è vera, quindi A è un furfante.

Contraddizione. La soluzione deve allora essere che A è un furfante e B è un cavaliere.

Esercizio 42

Sull'isola, incontri due abitanti, A e B, e così chiedi ad A: «Sei un cavaliere o un furfante?». A dice : «Io e B siamo dello stesso tipo». Cosa sono A e B?

Soluzione:

A dice p: A e B sono dello stesso tipo.

Supponiamo che A sia un furfante. Allora p è falsa. Quindi B è un cavaliere.
Supponiamo che A sia un cavaliere. Allora p è vera. Quindi B è un cavaliere.
Quindi la soluzione B è un cavaliere, ma non è possibile determinare cosa sia A.

Esercizio 43

Sull'isola, incontri due abitanti, A e B, e così chiedi ad A: «Sei un cavaliere o un furfante?». A dice: «Almeno uno di noi due è un furfante». Cosa sono A e B?

Soluzione:

p: A è un furfante

q: B è un furfante

A dice: $p \vee q$

Supponiamo che A sia un furfante. Allora $p \vee q$ è falsa. Quindi p è falsa e q è falsa. Quindi A è un cavaliere. Contraddizione.
Supponiamo che A sia un cavaliere. Allora $p \vee q$ è vera e p è falsa. Quindi q è vera, e B è un furfante. L'unica possibilità è quindi che A sia un cavaliere e B un furfante.

Esercizio 44

Sull'isola, incontri tre abitanti, A, B e C, e chiedi ad A e B: «Sei un cavaliere o un furfante?». A dice: «Siamo tre furfanti». B dice: «Uno solo di noi è un cavaliere». Cosa sono A, B e C?

Soluzione:

p: A è un furfante

q: B è un furfante

r: C è un furfante

z: Uno solo di noi è cavaliere

A dice: $p \wedge q \wedge r$

B dice: z

Supponiamo che A sia un cavaliere. Allora quello che dice è vero, quindi $p \wedge q \wedge r$ è vero. Ma p è falso per ipotesi. Contraddizione. Quindi A non può essere un cavaliere.
Supponiamo che A sia un furfante. Allora $p \wedge q \wedge r$ è falsa. Quindi almeno un congiunto è falso. Non può però essere p, perché p dice che A è un furfante. Quindi p deve essere vera per ipotesi.
Supponiamo che q sia vera, che quindi B sia un furfante, e che sia r ad essere falsa. Supponiamo poi che A sia un furfante (visto che non può essere altro per il primo ragionamento). Se C fosse un cavaliere, allora z sarebbe vera, e B avrebbe detto la verità e non sarebbe un furfante. Quindi anche C deve essere un furfante. Contraddizione.
Se è q ad essere falsa, allora B è un cavaliere. E allora z è vera, e C deve essere un furfante. E così anche r deve essere vera. Quindi l'unica possibilità è che A sia un furfante, B un cavaliere, e C un furfante.

Esercizio 45

Sull'isola, incontri tre abitanti, A, B e C, e chiedi ad A e B: «Sei un cavaliere o un furfante?». A dice: «Siamo tre furfanti». B dice: «Uno solo di noi è un furfante». Cosa sono A e B e C?

Soluzione:

A dice p: Siamo tre furfanti

B dice q: Uno solo di noi è un furfante

Supponiamo che A sia un cavaliere. Allora p è falsa, e A non è un cavaliere. Contraddizione. Quindi A deve essere un furfante. Supponiamo allora che A sia un furfante. Allora p è falsa e qualcuno, tra B e C è un cavaliere.
Supponiamo che C sia un furfante. Se B è un cavaliere, allora quel che dice è vero. Ma allora uno tra A e C dovrebbe essere un cavaliere, contro l'ipotesi. Quindi C non può essere un cavaliere. Ma se B è un furfante, allora sarebbero tutti furfanti, contro l'ipotesi. Quindi C deve essere un cavaliere.
Supponiamo che C sia un cavaliere (e A sempre un furfante). Se B fosse anche un furfante, quel che dice dovrebbe esser falso. E infatti è così. Se B fosse un cavaliere, allora q dovrebbe essere vero. E infatti è così. Quindi la soluzione è A furfante, C cavaliere e B può essere un cavaliere o un furfante.

Capitolo 3

Calcolo proposizionale

Esercizio 1

Dimostrate le seguenti sequenze:

1. $P \wedge Q \vdash P \vee Q$
2. $P \to (Q \wedge R) \vdash (P \to Q) \wedge (P \to R)$
3. $(P \to Q), (P \to R), P \vdash Q \wedge R$
4. $P \to (Q \wedge R) \vdash (P \wedge Q) \leftrightarrow (P \wedge R)$
5. $\neg P \to \neg Q, \neg P, R \vee \neg R \vdash \neg Q \vee R$
6. $P \vdash \neg(\neg P \wedge Q)$
7. $\neg(P \wedge \neg Q), P \vdash Q$
8. $P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow R \vdash P \leftrightarrow R$
9. $P \leftrightarrow Q \vdash \neg P \leftrightarrow \neg Q$
10. $\neg P \vee Q \vdash \neg(P \wedge \neg Q)$
11. $P \to Q, P \to \neg Q \vdash \neg P$
12. $(P \to Q) \wedge (P \to R) \vdash P \to (Q \wedge R)$
13. $P \to Q \vdash P \wedge R \to Q \wedge R$
14. $P \to Q \vdash P \vee R \to Q \vee R$
15. $\neg P \to P \vdash P$
16. $\neg P \vdash P \to Q$
17. $P \wedge Q \vdash P \to Q$

18. $\neg P \vdash (P \to Q) \leftrightarrow \neg P$

19. $P \land Q \dashv\vdash \neg(P \to \neg Q)$

20. $P \lor (Q \lor R) \vdash Q \lor (P \lor R)$

21. $(\neg A \to \neg B) \land (\neg B \to B) \vdash A$

22. $\neg E \lor G, \neg E \to G \vdash G$

23. $P \land (Q \lor R) \dashv\vdash (P \land Q) \lor (P \land R)$

24. $\neg A \land \neg B \vdash A \leftrightarrow B$

25. $P \to (Q \to (R \to S)) \vdash R \to (P \to (Q \to S))$

26. $P \vdash (\neg(Q \to R) \to \neg P) \to (\neg R \to \neg Q)$

27. $Q \to R \vdash (P \lor Q) \to (P \lor R)$

28. $P \to Q \vdash \neg P \lor Q$

29. $P \lor Q, (Q \to R) \land (\neg P \lor S), ((Q \land R) \to T \vdash T \lor S$

30. $P \land Q \to R \lor S \vdash (P \to R) \lor (Q \to S)$

31. $P \lor Q \to R \land S \vdash (P \to R) \land (Q \to S)$

32. $D \to E, E \to (Z \land W), \neg Z \lor \neg W \vdash \neg D$

33. $(W \to S) \land \neg M, (\neg W \to H) \lor M, (\neg S \to H) \to K \vdash K$

34. $((K \land J) \lor I) \lor \neg Y, Y \land ((I \lor K) \to F) \vdash F \lor N$

35. $F \to (G \to H), \neg I \to (F \lor H), F \to G \vdash I \lor H$

Soluzione: (la soluzione verrà fornita solamente di alcune delle sequenze sopra riportate)

1. $P \land Q \vdash P \lor Q$

Prova

1	(1)	$P \land Q$	A
1	(2)	P	1, E$\land$
1	(3)	$P \lor Q$	2, I$\lor$

2. $P \to (Q \wedge R) \vdash (P \to Q) \wedge (P \to R)$

Prova

1	(1)	$P \to (Q \wedge R)$	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	$Q \wedge R$	1, 2 MPP
1,2	(4)	Q	3 E$\wedge$
1,2	(5)	R	3 E$\wedge$
1	(6)	$P \to Q$	2, 4 PC
1	(7)	$P \to R$	2, 5 PC
1	(8)	$(P \to Q) \wedge (P \to R)$	6, 7 I$\wedge$

3. $(P \to Q), (P \to R), P \vdash Q \wedge R$

Prova

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$P \to R$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1, 3 MPP
2,3	(5)	R	2, 3 MPP
1,2,3	(6)	$Q \wedge R$	4, 5 I$\wedge$

4. $P \to (Q \land R) \vdash (P \land Q) \leftrightarrow (P \land R)$

Prova

1	(1)	$P \to (Q \land R)$	A
2	(2)	$P \land Q$	A
2	(3)	P	2 E$\land$
1,2	(4)	$Q \land R$	1, 3 MPP
1,2	(5)	R	4 E$\land$
1,2	(6)	$P \land R$	3, 5 I$\land$
1	(7)	$(P \land Q) \to (P \land R)$	2, 6 PC
8	(8)	$P \land R$	A
8	(9)	P	8 E$\land$
1,8	(10)	$Q \land R$	1, 9 MPP
1,8	(11)	Q	10 E$\land$
1,8	(12)	$P \land Q$	9, 11 I$\land$
1	(13)	$(P \land R) \to (P \land Q)$	8, 12 PC
1	(14)	$((P \land Q) \to (P \land R)) \land ((P \land R) \to (P \land Q))$	7, 13 I$\land$
1	(15)	$(P \land Q) \leftrightarrow (P \land R)$	14 Def. $\leftrightarrow$

5. $\neg P \to \neg Q, \neg P, R \lor \neg R \vdash \neg Q \lor R$

Prova

1	(1)	$\neg P \to \neg Q$	A
2	(2)	$\neg P$	A
3	(3)	$R \lor \neg R$	A
1,2	(4)	$\neg Q$	1, 2 MPP
1,2	(5)	$\neg Q \lor R$	4 I$\lor$

6. $P \vdash \neg(\neg P \wedge Q)$

Prova

1	(1)	P	A
2	(2)	$\neg P \wedge Q$	A
2	(3)	$\neg P$	2 E$\wedge$
1,2	(4)	$P \wedge \neg P$	1, 3 I$\wedge$
1	(5)	$\neg(\neg P \wedge Q)$	2, 4 RAA

7. $\neg(P \wedge \neg Q), P \vdash Q$

Prova

1	(1)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	$\neg Q$	A
2,3	(4)	$P \wedge \neg Q$	2, 3 I$\wedge$
1,2,3	(5)	$(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \wedge \neg Q)$	1, 4 I$\wedge$
1,2	(6)	$\neg\neg Q$	3, 5 RAA
1,2	(7)	Q	6 DN

10. $\neg P \vee Q \vdash \neg(P \wedge \neg Q)$

Prova

1	(1)	$\neg P \vee Q$	A
2	(2)	$P \wedge \neg Q$	A
2	(3)	P	2 E$\wedge$
2	(4)	$\neg Q$	2 E$\wedge$

5	(5)	$\neg P$	A
2,5	(6)	$\neg P \wedge P$	3, 5 I$\wedge$
5	(7)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	2, 6 RAA
8	(8)	Q	A
2,8	(9)	$Q \wedge \neg Q$	4, 8 I$\wedge$
8	(10)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	2, 9 RAA
1	(11)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	1, 5, 7, 8, 10 I$\vee$

11. $P \to Q, P \to \neg Q \vdash \neg P$

Prova

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$P \to \neg Q$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1, 3 MPP
2,3	(5)	$\neg Q$	2, 3 MPP
1,2,3	(6)	$Q \wedge \neg Q$	4, 5 I$\wedge$
1,2	(7)	$\neg P$	RAA

12. $(P \to Q) \wedge (P \to R) \vdash P \to (Q \wedge R)$

Prova

1	(1)	$(P \to Q) \wedge (P \to R)$	A
2	(2)	P	A
1	(3)	$P \to Q$	1 E$\wedge$
1	(4)	$P \to R$	1 E$\wedge$
1,2	(5)	Q	2, 3 MPP

1,2	(6)	R	2, 4 MPP
1,2	(7)	$Q \wedge R$	5, 6 I$\wedge$
1	(8)	$P \to (Q \wedge R)$	2, 7 PC

15. $\neg P \to P \vdash P$

Prova

1	(1)	$\neg P \to P$	A
2	(2)	$\neg P$	A
1,2	(3)	P	1, 2 MPP
1,2	(4)	$P \wedge \neg P$	2, 3 I$\wedge$
1	(5)	$\neg\neg P$	2, 4 RAA
1	(6)	P	5 DN

16. $\neg P \vdash P \to Q$

Prova

1	(1)	$\neg P$	A
1	(2)	$\neg P \vee Q$	1 I$\vee$
1	(3)	$P \to Q$	IT $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

E′ opportuno aggiungere un commento a questa prova. Nella riga (2) è stata utilizzata la regola d'inferenza derivata IT – Introduzione di Teorema. Il teorema utilizzato è anche noto come IM – Implicazione Materiale – ma si è preferito riportarlo per esteso a fianco della regola applicata anziché scrivere solamente IM. Ricordiamo che, siccome i teoremi in forma bicondizionale sono chiamati *equivalenze*, in alcuni testi è possibile trovare la dicitura IE – Introduzione di Equivalenza – anziché IT.

Essendo riusciti a provare la sequenza facendo uso di regole derivate, sappiamo che è pertanto possibile provare la stessa sequenza utilizzando solamente regole d'inferenza di base. In questo caso, però, la prova sarà più lunga.

20. $P \vee (Q \vee R) \vdash Q \vee (P \vee R)$

Prova

1	(1)	$P \vee (Q \vee R)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee R$	2 I$\vee$
2	(4)	$Q \vee (P \vee R)$	3 I$\vee$
5	(5)	$Q \vee R$	A
6	(6)	Q	A
6	(7)	$Q \vee (P \vee R)$	6 I$\vee$
8	(8)	R	A
8	(9)	$P \vee R$	8 I$\vee$
8	(10)	$Q \vee (P \vee R)$	9 I$\vee$
5	(11)	$Q \vee (P \vee R)$	5, 6, 7, 8, 10 E$\vee$
1	(12)	$Q \vee (P \vee R)$	1, 2, 4, 5, 11 E$\vee$

21. $(\neg A \to \neg B) \wedge (\neg B \to B) \vdash A$

Prova

1	(1)	$(\neg A \to \neg B) \wedge (\neg B \to B)$	A
1	(2)	$\neg A \to \neg B$	1 E$\wedge$
1	(3)	$\neg B \to B$	1 E$\wedge$
4	(4)	$\neg A$	A
1,4	(5)	$\neg B$	2, 4 MPP
1,4	(6)	B	3, 5 MPP

1,4	(7)	$B \wedge \neg B$	5, 6 I$\wedge$
1	(8)	$\neg\neg A$	4, 7 RAA
1	(9)	A	8 DN

24. $\neg A \wedge \neg B \vdash A \leftrightarrow B$

Prova

1	(1)	$\neg A \wedge \neg B$	A
1	(2)	$\neg A$	1 E$\wedge$
1	(3)	$\neg B$	1 E$\wedge$
1	(4)	$A \rightarrow B$	2 IS $\neg A \vdash A \rightarrow B$
1	(5)	$B \rightarrow A$	3 IS $\neg B \vdash B \rightarrow A$
1	(6)	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	4, 5 I$\wedge$
1	(7)	$A \leftrightarrow B$	6 Def. $\leftrightarrow$

Anche in questo caso, per velocizzare la prova abbiamo utilizzato la regola derivata IS (Introduzione di Sequenza). La sequenza utilizzata è riportata a fianco.

25. $P \to (Q \to (R \to S)) \vdash R \to (P \to (Q \to S))$

Prova

1	(1)	$P \to (Q \to (R \to S))$	A
2	(2)	R	A
3	(3)	P	A
4	(4)	Q	A
1,3	(5)	$Q \to (R \to S)$	1, 3 MPP
1,3,4	(6)	$R \to S$	4, 5 MPP
1,2,3,4	(7)	S	2, 6 MPP
1,2,3	(8)	$Q \to S$	4, 7 PC
1,2	(9)	$P \to (Q \to S)$	3, 8 PC
1	(10)	$R \to (P \to (Q \to S))$	2, 9 PC

26. $P \vdash (\neg(Q \to R) \to \neg P) \to (\neg R \to \neg Q)$

Prova

1	(1)	P	A
2	(2)	$\neg(Q \to R) \to \neg P$	A
3	(3)	$\neg R$	A
1	(4)	$\neg\neg P$	1 DN
1,2	(5)	$\neg\neg(Q \to R)$	2, 4 MTT
1,2	(6)	$Q \to R$	5 DN
1,2,3	(7)	$\neg Q$	3, 6 MTT
1,2	(8)	$\neg R \to \neg Q$	3, 7 PC
1	(9)	$(\neg(Q \to R) \to \neg P) \to (\neg R \to \neg Q)$	2, 8 PC

27. $Q \to R \vdash (P \lor Q) \to (P \lor R)$

Prova

1	(1)	$Q \to R$	A
2	(2)	$P \lor Q$	A
3	(3)	P	A
3	(4)	$P \lor R$	3 I$\lor$
5	(5)	Q	A
1,5	(6)	R	1, 5 MPP
1,5	(7)	$P \lor R$	6 I$\lor$
1,2	(8)	$P \lor R$	2, 3, 4, 5, 7 E$\lor$
1	(9)	$(P \lor Q) \to (P \lor R)$	2, 8 PC

28. $P \to Q \vdash \neg P \lor Q$

Prova

1	(1)	$P \to Q$	A
	(2)	$P \lor \neg P$	IT
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1, 3 MPP
1,3	(5)	$\neg P \lor Q$	4 I$\lor$
6	(6)	$\neg P$	A
6	(7)	$\neg P \lor Q$	6 I$\lor$
1	(8)	$\neg P \lor Q$	2, 3, 5, 6, 7 E$\lor$

32. $D \to E, E \to (Z \wedge W), \neg Z \vee \neg W \vdash \neg D$

Prova

1	(1)	$D \to E$	A
2	(2)	$E \to (Z \wedge W)$	A
3	(3)	$\neg Z \vee \neg W$	A
3	(4)	$\neg(Z \wedge W)$	3 IE De Morgan
5	(5)	D	A
$1,5$	(6)	E	1, 5 MPP
$1,2,5$	(7)	$Z \wedge W$	6, 2 MPP
$1,2,3,5$	(8)	$(Z \wedge W) \wedge \neg(Z \wedge W)$	7, 4 I$\wedge$
$1,2,3$	(9)	$\neg D$	5, 8 RAA

34. $((K \wedge J) \vee I) \vee \neg Y, Y \wedge ((I \vee K) \to F) \vdash F \vee N$

Prova

1	(1)	$((K \wedge J) \vee I) \vee \neg Y$	A
2	(2)	$Y \wedge ((I \vee K) \to F)$	A
2	(3)	Y	2 E$\wedge$
2	(4)	$(I \vee K) \to F$	2 E$\wedge$
2	(5)	$\neg\neg Y$	3 DN
$1,2$	(6)	$(K \wedge J) \vee I)$	1, 5 MTP
7	(7)	$K \wedge J$	A
7	(8)	K	7 E$\wedge$
7	(9)	$I \vee K$	8 I$\vee$
$2,7$	(10)	F	4, 9 MPP
$2,7$	(11)	$F \vee N$	10 I$\vee$
12	(12)	I	A

12	(13)	$I \vee K$	12 I$\vee$
12,2	(14)	F	4, 13 MPP
12,2	(15)	$F \vee N$	14 I$\vee$
1,2	(16)	$F \vee N$	6, 7, 11, 12, 15 E$\vee$

35. $F \to (G \to H), \neg I \to (F \vee H), F \to G \vdash I \vee H$

Prova

1	(1)	$F \to (G \to H)$	A
2	(2)	$\neg I \to (F \vee H)$	A
3	(3)	$F \to G$	A
	(4)	$I \vee \neg I$	IT
5	(5)	I	A
5	(6)	$I \vee H$	5 I$\vee$
7	(7)	$\neg I$	A
2,7	(8)	$F \vee H$	2, 7 MPP
9	(9)	F	A
3,9	(10)	G	3, 9 MPP
1,9	(11)	$G \to H$	1, 9 MPP
1,3,9	(12)	H	10, 11 MPP
1,3,9	(13)	$I \vee H$	12 I$\vee$
14	(14)	H	A
14	(15)	$I \vee H$	14 I$\vee$
1,2,7,3	(16)	$I \vee H$	8, 9, 13, 14, 15 E$\vee$
1,2,3	(17)	$I \vee H$	4, 5, 6, 7, 16 E$\vee$

Esercizio 2

Dimostrare i seguenti teoremi:

1. $\vdash P \to P$
2. $\vdash P \to (Q \to (P \wedge Q))$
3. $\vdash \neg(P \leftrightarrow \neg P)$
4. $\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$
5. $\vdash (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$
6. $\vdash Q \to (P \vee \neg P)$
7. $\vdash (P \wedge \neg P) \to Q$
8. $\vdash \neg(P \wedge \neg(Q \to P))$
9. $\vdash (P \to (Q \wedge R)) \to (P \to R)$
10. $\vdash (P \to \neg Q) \to \neg(P \wedge Q)$
11. $\vdash ((P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)) \to (Q \leftrightarrow \neg P)$
12. $\vdash \neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow Q)$
13. $\vdash P \to (P \vee Q)$
14. $\vdash (P \to Q) \vee (Q \to P)$
15. $\vdash (P \to \neg P) \to \neg P$
16. $\vdash (P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$
17. $\vdash (P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \to \neg P$
18. $\vdash (P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$
19. $\vdash ((P \to Q) \to (P \to R)) \to ((P \to (Q \to R))$
20. $\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$
21. $\vdash (P \leftrightarrow Q) \wedge (R \leftrightarrow S) \to (P \vee R \leftrightarrow Q \vee S)$
22. $\vdash ((P \to Q) \to Q) \leftrightarrow ((Q \to P) \to P)$
23. $\vdash (P \to (Q \wedge R)) \to ((P \wedge Q) \leftrightarrow (P \wedge R))$
24. $\vdash (P \to (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((\neg Q \vee \neg R) \to \neg P)$
25. $\vdash (P \to (Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (P \to ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee Q))$

26. $\vdash (P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$

27. $\vdash (P \vee Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

28. $\vdash (P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(P \rightarrow \neg Q)$

29. $\vdash (P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \rightarrow Q$

30. $\vdash P \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))$

31. $\vdash \neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

32. $\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$

33. $\vdash \neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))$

34. $\vdash (P \wedge \neg P) \leftrightarrow (Q \wedge \neg Q)$

35. $\vdash (P \vee \neg P) \leftrightarrow (Q \vee \neg Q)$

Soluzione: (la soluzione verrà fornita solamente di alcune delle sequenze sopra riportate)

1. $\vdash P \rightarrow P$

Prova

1	(1)	P	A
	(2)	$P \rightarrow P$	1, 1 PC

2. $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$

Prova

1	(1)	P	A
2	(2)	Q	A
1,2	(3)	$P \wedge Q$	1, 2 I$\wedge$
1	(4)	$Q \rightarrow (P \wedge Q)$	2, 3 PC
	(5)	$P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$	1, 4 PC

3. $\vdash \neg(P \leftrightarrow \neg P)$

Prova

1	(1)	$P \leftrightarrow \neg P$	A
1	(2)	$(P \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow P)$	Def. $\leftrightarrow$
1	(3)	$P \rightarrow \neg P$	2 E$\wedge$
1	(4)	$\neg P \rightarrow P$	2 E$\wedge$
5	(5)	P	A
1,5	(6)	$\neg P$	3, 5 MPP
1,5	(7)	$P \wedge \neg P$	5, 6 I$\wedge$
1	(8)	$\neg P$	5, 7 RAA
1	(9)	P	4, 8 MPP
1	(10)	$P \wedge \neg P$	8, 9 I$\wedge$
	(11)	$\neg(P \leftrightarrow \neg P)$	1, 10 RAA

5. $\vdash (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$

Prova

(1)	$(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge Q)$	IT(s) $A \vee \neg A$
(2)	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$	1 De Morgan

IT(s) significa Introduzione di Teorema con sostituzione.

6. $\vdash Q \rightarrow (P \vee \neg P)$

Prova

1	(1)	Q	A
	(2)	$P \vee \neg P$	IT
	(3)	$Q \rightarrow (P \vee \neg P)$	1, 2 PC

8. $\vdash \neg(P \wedge \neg(Q \rightarrow P))$

Prova

1	(1)	$P \wedge \neg(Q \rightarrow P)$	A
1	(2)	P	1 E$\wedge$
1	(3)	$\neg(Q \rightarrow P)$	1 E$\wedge$
1	(4)	$Q \wedge \neg P$	3 IS $\neg(A \rightarrow B) \vdash A \wedge \neg B$
1	(5)	$\neg P$	4 E$\wedge$
1	(6)	$P \wedge \neg P$	2, 5 I$\wedge$
	(7)	$\neg(P \wedge \neg(Q \rightarrow P))$	1, 6 RAA

13. $\vdash P \rightarrow (P \vee Q)$

Prova

1	(1)	P	A
1	(2)	$P \vee Q$	1 I$\vee$
	(3)	$P \rightarrow (P \vee Q)$	2 PC

14. $\vdash (P \to Q) \vee (Q \to P)$

Prova

	(1)	$P \vee \neg P$	IT
2	(2)	P	A
2	(3)	$Q \to P$	2 IS $P \vdash Q \to P$
2	(4)	$(P \to Q) \vee (Q \to P)$	3 I$\vee$
5	(5)	$\neg P$	A
5	(6)	$P \to Q$	5 IS $\neg P \vdash P \to Q$
5	(7)	$(P \to Q) \vee (Q \to P)$	6 I$\vee$
	(8)	$(P \to Q) \vee (Q \to P)$	1, 2, 4, 5, 7 E$\vee$

15. $\vdash (P \to \neg P) \to \neg P$

Prova

1	(1)	$P \to \neg P$	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	$\neg P$	1, 2 MPP
1,2	(4)	$P \wedge \neg P$	2, 3 I$\wedge$
1	(5)	$\neg P$	2, 4 RAA
	(6)	$(P \to \neg P) \to \neg P$	1, 5 PC

20. $\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$

Prova

1	(1)	$(P \to Q) \to P$	A
1	(2)	$\neg(P \to Q) \vee P$	1 IS(s) $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$
3	(3)	$\neg(P \to Q)$	A
3	(4)	$P \wedge \neg Q$	3 IS(s) $\neg(P \to \neg Q) \vdash P \wedge Q$
3	(5)	P	4 E$\wedge$
6	(6)	P	A
1	(7)	P	2, 3, 5, 6, 6 E$\vee$
	(8)	$((P \to Q) \to P) \to P$	1, 7 PC

Capitolo 4

Logica delle proposizioni categoriche

Avvertenza per il lettore: nelle soluzioni degli esercizi di questo capitolo non si assume l'Assioma di Aristotele[1].

Esercizio 1

Utilizzando le relazioni del quadrato logico, determinare, se possibile, quale valore di verità assumono le altre tre proposizioni categoriche quando:

- A è vera
- E è vera
- I è vera
- O è vera
- A è falsa
- E è falsa
- I è falsa
- O è falsa

Soluzione:

- A è vera

  Presa A come riferimento, E è la sua contraria, I la subalterna e O la contraddittoria. Segue che:

[1]Per ogni termine T, c''e sempre almeno un individuo che appartiene all'estensione di T.

1. O è falsa
2. Non è possibile determinare il valore di verità di I e E

- E è vera

  Presa E come riferimento, A è la sua contraria, I la contraddittoria e O la subalterna. Segue che:

  1. I è falsa
  2. Non è possibile determinare il valore di verità di A e O

- I è vera

  Presa I come riferimento, A è la sua subalterna, E la contraddittoria e O la subcontraria. Segue che:

  1. E è falsa
  2. Non è possibile determinare il valore di verità di A e O

- O è vera

  Presa O come riferimento, I è la sua subcontraria, A è la contraddittoria e E è la subalterna. Segue che:

  1. A è falsa
  2. Non è possibile determinare il valore di verità di I e E

- A è falsa

  Presa A come riferimento, E è la sua contraria, I la subalterna e O la contraddittoria. Segue che:

  1. O è vera
  2. Non è possibile determinare il valore di verità di I e E

- E è falsa

  Presa E come riferimento, A è la sua contraria, I la contraddittoria e O la subalterna. Segue che:

  1. I è vera
  2. Non è possibile determinare il valore di verità di A e O

- I è falsa

  Presa I come riferimento, risulta che A è la sua subalterna, E la contraddittoria e O la subcontraria. Segue che:

  1. E è vera
  2. Non è possibile determinare il valore di verità di A e O

- O è falsa

  Presa O come riferimento, I è la sua subcontraria, A è la contraddittoria e E è la subalterna. Segue che:

  1. A è vera
  2. Non è possibile determinare il valore di verità di I e E

Esercizio 2

Che cosa si può inferire sul valore di verità delle proposizioni dei seguenti insiemi (i) quando si assume che la prima proposizione è vera e (ii) quando si assume che è falsa?

1. - Tutti i dirigenti che hanno successo sono persone intelligenti
   - Nessun dirigente che ha successo è una persona intelligente
   - Alcuni dirigenti che hanno successo sono persone intelligenti
   - Alcuni dirigenti che hanno successo non sono persone intelligenti

2.
   - Nessun animale con le corna è carnivoro
   - Alcuni animali con le corna sono carnivori
   - Alcuni animali con le corna non sono carnivori
   - Tutti gli animali con le corna sono carnivori

3.
   - Alcuni isotopi di uranio sono sostanze altamente instabili
   - Alcuni isotopi di uranio non sono sostanze altamente instabili
   - Tutti gli isotopi di uranio sono sostanze altamente instabili
   - Nessun isotopo di uranio è una sostanza altamente instabile

4.
   - Alcuni professori universitari non sono conferenzieri piacevoli
   - Tutti i professori universitari sono conferenzieri piacevoli
   - Nessun professore universitario è un conferenziere piacevole
   - Alcuni professori universitari sono conferenzieri piacevoli

<u>Soluzione</u>:

Di seguito sono riportate le soluzioni dei soli esercizi 1 e 4, essendo gli esercizi 2 e 3 simili nello svolgimento.

1. Cominciamo col mettere in forma le asserzioni categoriche. Chiamiamo «S» il soggetto «dirigente che ha successo» e «P» il predicato «persona intelligente». Allora:

   - «Tutti i dirigenti che hanno successo sono persone intelligenti» corrisponde a «Ogni S è P», ovvero è un'asserzione categorica di tipo A
   - «Nessun dirigente che ha successo è una persona intelligente» corrisponde a «Ogni S non è P», ovvero è un'asserzione categorica di tipo E
   - «Alcuni dirigenti che hanno successo sono persone intelligenti» corrisponde a «Qualche S è P», ovvero è un'asserzione categorica di tipo I
   - «Alcuni dirigenti che hanno successo non sono persone intelligenti» corrisponde a «Qualche S non è P», ovvero è un'asserzione categorica di tipo O

   Se (i) la prima proposizione è vera, essendo questa un'asserzione categorica di tipo A, segue che (si veda l'esercizio precedente) la quarta (O) è falsa e che i valori di verità della seconda e della terza (E e I) sono indeterminati. Se (ii) la prima proposizione è falsa, segue che la quarta è vera e che i valori di verità della seconda e della terza sono ancora indeterminati.

4. Mettiamo in forma le asserzioni categoriche. Chiamiamo «S» il soggetto «Professore universitario» e «P» il predicato «conferenziere piacevole». Allora:

   - «Alcuni professori universitari non sono conferenzieri piacevoli» corrisponde a «Qualche S non è P», ovvero è un'asserzione categorica di tipo O
   - «Tutti i professori universitari sono conferenzieri piacevoli» corrisponde a «Ogni S è P», ovvero è un'asserzione categorica di tipo A
   - «Nessun professore universitario è un conferenziere piacevole» corrisponde a «Ogni S non è P», ovvero è un'asserzione categorica di tipo E
   - «Alcuni professori universitari sono conferenzieri piacevoli» corrisponde a «Qualche S è P», ovvero è un'asserzione categorica di tipo I

   Se (i) la prima proposizione è vera, essendo questa un'asserzione categorica di tipo O, segue che la seconda (A) è falsa e che i valori di verità della terza e della quarta (E e I) sono indeterminati. Se (ii) la prima proposizione è falsa, segue che la seconda è vera e che i valori di verità della terza e della quarta sono ancora indeterminati.

Esercizio 3

Mettere in forma i seguenti sillogismi, se necessario.

1. Alcuni filosofi hanno la testa fra le nuvole. Alcune persone con la testa fra le nuvole sono geniali. Quindi alcuni filosofi sono geniali.
2. Tutti i logici sono distratti. Alcuni logici sono persone interessanti. Quindi alcune persone interessanti sono distratte.
3. Qualche partita non è truccata. Ogni partita è trasmessa in televisione, quindi qualcosa tra tutto quello che viene trasmesso in televisione non è truccato.

4. Nessun ignorante conosce i fatti. Tutti quelli che conoscono i fatti sono politici. Dunque nessun politico è ignorante.

5. Nessuna persona che ignori i fatti è una persona che sia davvero oggettiva. Infatti, nessuna persona che sia davvero oggettiva è una persona che può sbagliarsi facilmente e tutte le persone che possono sbagliarsi facilmente sono persone che ignorano i fatti.

6. Poiché nessuna approssimazione è un numero irrazionale e tutte le cose interessanti per gli ingegneri sono approssimazioni, nessun numero irrazionale è una cosa interessante per gli ingegneri.

7. Alcuni riformatori sono fanatici, quindi alcuni idealisti sono fanatici, dato che tutti i riformatori sono idealisti.

8. Alcuni filosofi sono matematici; quindi alcuni scienziati sono filosofi, poiché tutti gli scienziati sono matematici.

9. Nessun nevrotico è un parassita, ma tutti i criminali sono parassiti; ne segue che alcuni nevrotici non sono criminali.

10. Nessuna persona di carattere debole è un dirigente sindacale, perché nessuna persona di carattere debole è un vero progressista e tutti i dirigenti sindacali sono veri progressisti.

11. Tutti gli incompetenti commettono errori. Le persone diligenti non commettono errori. Quindi, nessuna persona incompetente è diligente.

12. Tutto quello che ha detto Mario è assurdo. Poiché tutte le assurdità sono deplorevoli, tutto quello che ha detto Mario è deplorevole.

13. Chiunque riceverà l'incarico deve essere in grado di portarlo a termine. Nessun filosofo è in grado di portarlo a termine, perciò nessun filosofo avrà l'incarico.

14. Ogni elettrone ha carica negativa. Nessun positrone ha carica negativa. Quindi, nessun positrone è un elettrone.

15. Ogni elettrone ha carica negativa. Nessun positrone ha carica negativa. Quindi, ci sono positroni che non sono elettroni.

16. Ci sono baristi che cantano, e tutti i cantanti sono attori. Quindi tra i baristi ci sono degli attori.

17. Non tutti gli attori cantano. I baristi cantano tutti. Quindi ci sono baristi che non sono attori.

18. Qualche attore canta e qualche barista canta. Quindi qualche barista fa l'attore.

19. Tra gli attori ci sono dei baristi, e tra i baristi ci sono dei cantanti. Quindi non è vero che nessun attore canta.

20. Ogni attore canta. Non ci sono baristi cantanti. Quindi non ci sono baristi attori.

<u>Soluzione</u>:

Per mettere in forma i seguenti sillogismi basterebbe mettere in forma ciascun asserto categorico (le due premesse e la conclusione). Tuttavia, oltre a fare questo, nella soluzione ordineremo il sillogismo in modo da poterlo classificare secondo il sistema delle 4 figure.
Conveniamo di rappresentare con «H» il termine maggiore del sillogismo, con «G» il termine medio e con «F» quello minore. Ricordiamo che nella conclusione compaiono necessariamente prima il termine minore, poi quello maggiore. Da questo risulta semplice individuare il termine medio. A questo punto, individuati H, G e F, si ponga come prima premessa quella in cui compare il termine maggiore. In questo modo, seguendo lo schema delle 4 figure (pag. 147 del Varzi), ed indicando ciascun asserto categorico fondamentale con la lettera corrispondente (A, E, I e O), è facile ottenere la classificazione desiderata.

1. Alcuni filosofi hanno la testa fra le nuvole. Alcune persone con la testa fra le nuvole sono geniali. Quindi alcuni filosofi sono geniali.

   H = «persone che sono geniali»

   G = «persone che hanno la testa fra le nuvole»

   F = «persone che sono filosofi»

   La forma del sillogismo categorico, ponendo come prima premessa quella col termine maggiore, è:

   Qualche G è H
   Qualche F è G
   ∴ Qualche F è H

   La sua classificazione è **III-figura1**. Non rientra nei 15 sillogismi validi, dunque è invalido.

3. Qualche partita non è truccata. Ogni partita è trasmessa in televisione, quindi qualcosa tra tutto quello che viene trasmesso in televisione non è truccato.

   H = «cose che sono truccate»

   G = «partite»

   F = «cose che vengono trasmesse in televisione»

   La forma del sillogismo categorico, ponendo come prima premessa quella col termine maggiore, è:

   Qualche G non è H

   Ogni G è F

   ∴ Qualche F non è H

   La sua classificazione è **OAO-figura3**. Si tratta di uno dei 15 sillogismi validi.

5. Nessuna persona che ignori i fatti è una persona che sia davvero oggettiva. Infatti, nessuna persona che sia davvero oggettiva è una persona che può sbagliarsi facilmente e tutte le persone che possono sbagliarsi facilmente sono persone che ignorano i fatti.

   H = «persona che sia davvero oggettiva»

   G = «persona che può sbagliarsi facilmente»

   F = «persona che ignora i fatti»

   La forma del sillogismo categorico, ponendo come prima premessa quella col termine maggiore, è:

   Ogni H non è G

   Ogni G è F

   ∴ Ogni F non è H

   La sua classificazione è **EAE-figura4**. E′ un sillogismo invalido.

7. Alcuni riformatori sono fanatici, quindi alcuni idealisti sono fanatici, dato che tutti i riformatori sono idealisti.

   H = «fanatici»

   G = «riformatori»

   F = «idealisti»

   La forma del sillogismo categorico, ponendo come prima premessa quella col termine maggiore, è:

   $$\begin{array}{ll} & \text{Qualche G è H} \\ & \text{Ogni G è F} \\ \therefore & \text{Qualche F è H} \end{array}$$

   La sua classificazione è **IAI-figura3**. Si tratta di uno dei 15 sillogismi validi.

9. Nessun nevrotico è un parassita, ma tutti i criminali sono parassiti; ne segue che alcuni nevrotici non sono criminali.

   H = «criminali»

   G = «parassiti»

   F = «nevrotici»

   La forma del sillogismo categorico, ponendo come prima premessa quella col termine maggiore, è:

   $$\begin{array}{ll} & \text{Ogni H è G} \\ & \text{Ogni F non è G} \\ \therefore & \text{Qualche F non è H} \end{array}$$

   La sua classificazione è **AEO-figura2**. Si tratta di un sillogismo invalido.

11. Tutti gli incompetenti commettono errori. Le persone diligenti non commettono errori. Quindi, nessuna persona incompetente è diligente.

    H = «persona diligente»

    G = «persona che commette errori»

    F = «persona incompetente»

    La forma del sillogismo categorico, ponendo come prima premessa quella col termine maggiore, è:

    $$\begin{array}{ll} & \text{Ogni H non è G} \\ & \text{Ogni F è G} \\ \therefore & \text{Ogni F non è H} \end{array}$$

    La sua classificazione è **EAE-figura2**. Si tratta di uno dei 15 sillogismi validi.

15. Ogni elettrone ha carica negativa. Nessun positrone ha carica negativa. Quindi, ci sono positroni che non sono elettroni.

    H = «elettrone»

    G = «cosa che ha carica negativa»

    F = «positrone»

    La forma del sillogismo categorico, ponendo come prima premessa quella col termine maggiore, è:

    $$\begin{array}{ll} & \text{Ogni H è G} \\ & \text{Ogni F non è G} \\ \therefore & \text{Qualche F non è H} \end{array}$$

    La sua classificazione è **AEO-figura2**. Si tratta di un sillogismo invalido.

17. Non tutti gli attori cantano. I baristi cantano tutti. Quindi ci sono baristi che non sono attori.

    H = «attore»

    G = «persona che canta»

    F = «barista»

    Si noti che la prima premessa non corrisponde ad una delle 4 asserzioni categoriche fondamentali (A, E, I e O), ma è la negazione di un'asserzione A. Allora, per ricondurci ad un sillogismo categorico (in cui ogni enunciato deve essere un'asserzione di tipo A o E o I o O), sfruttiamo l'equivalenza tra $\neg$A e O. In sostanza: «Non tutti gli attori cantano» è equivalente a «Qualche attore non canta». Allora, la forma del sillogismo categorico, ponendo come prima premessa quella col termine maggiore, è:

    Qualche H non è G
    Ogni F è G
    $\therefore$ Qualche F non è H

    La sua classificazione è **OAO-figura2**. Si tratta di un sillogismo invalido.

19. Tra gli attori ci sono dei baristi, e tra i baristi ci sono dei cantanti. Quindi non è vero che nessun attore canta.

    H = «persona che canta»

    G = «barista»

    F = «attore»

    Si noti che la conclusione non è un'asserzione fondamentale, ma è la negazione di un'asserzione del tipo E. In virtù dell'equivalenza tra $\neg$E e I, possiamo sostituire «non è vero che nessun attore canta» con l'enunciato «qualche attore è una persona che canta». Allora, la forma del sillogismo categorico, ponendo come prima premessa quella col termine maggiore, è:

    Qualche G è H
    Qualche F è G
    $\therefore$ Qualche F è H

    La sua classificazione è **III-figura1**. Si tratta di un sillogismo invalido.

Esercizio 4

Come si differenziano questi due sillogismi?

Tutti i vegetariani sono laureati
Alcuni atleti sono laureati
Quindi: Alcuni atleti sono vegetariani.

Tutti gli artisti sono egoisti
Alcuni artisti sono poveri
Quindi: alcuni poveri sono egoisti.

Soluzione:

Mettiamo in forma il primo dei due sillogismi.

H = «vegetariani»
G = «laureati»
F = «atleti»

La forma del sillogismo categorico, ponendo come prima premessa quella col termine maggiore, è:

Ogni H è G

Qualche F è G

$\therefore$ Qualche F è H

La sua classificazione è **AII-figura2**. Si tratta di un sillogismo invalido.
Mettiamo in forma il secondo sillogismo.

H = «egoisti»
G = «artisti»
F = «poveri»

La forma del sillogismo categorico, ponendo come prima premessa quella col termine maggiore, è:

Ogni G è H

Qualche G è F

$\therefore$ Qualche F è H

La sua classificazione è **AII-figura3**. Si tratta di un sillogismo valido.

Esercizio 5

Fare degli esempi di sillogismi che abbiano la seguente forma:

1. AAA1
2. AAI2
3. EEO3
4. OAO4
5. IAE1

Soluzione:

1. AAA1

   Tutti i logici sono dei fan di Charlie Chaplin. Inoltre, tutti gli amici di Douglas Richard Hofstadter sono dei logici. Quindi, ogni amico di Douglas Richard Hofstadter è un fan di Charlie Chaplin.

2. AAI2

   Siccome ogni parappappero è contro-intuitivo e tutti i ciambawuamba sono contro-intuitivi, allora qualche ciambawuamba è un parappappero.

3. EEO3

   Nessun calciatore è poliglotta. Allora, dato che ogni calciatore non è un seguace di Sandra Mondaini, segue che qualche seguace di Sandra Mondaini non è poliglotta.

4. OAO4

   Poichè ci sono dei bravi fisici che non sono stati allievi di Leonard Susskind, e siccome ogni allievo di Leonard Susskind è un ammiratore di John Cage, ne segue che qualche ammiratore di John Cage non è un bravo fisico.

5. IAE1

Nessun filibustiere è un latinista. Infatti, tutti i filibustieri sono ganzi e qualche ganzo è un latinista.

Esercizio 6

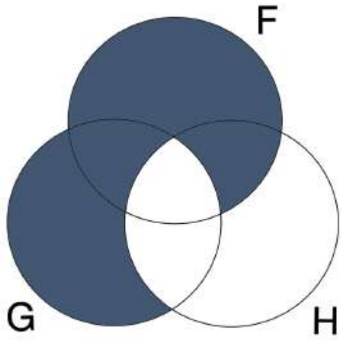
Utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn dimostrate la validità o l'invalidità dei seguenti sillogismi:

1. AAA1

Individuando il termine maggiore con «H», quello medio con «G» e quello minore con «F», la forma di AAA1 è la seguente:

Ogni G è H
Ogni F è G
$\therefore$ Ogni F è H

Per rappresentare la prima premessa, si oscuri la parte dell'insieme G che non si interseca con H. Per rendere la seconda premessa, si oscuri la parte di F che non si interseca con G. Il risultato è quello mostrato nell'immagine riportata qui sotto.



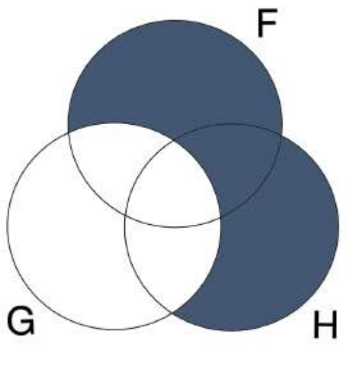
Il diagramma ottenuto implica/contiene la rappresentazione grafica della conclusione, che richiede che venga oscurata la parte dell'insieme F che non si interseca con l'insieme H. Pertanto il sillogismo è valido.

2. AAI2

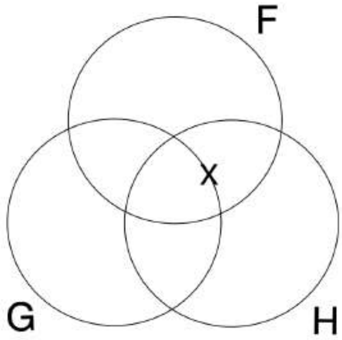
La forma di AAI2 è la seguente:

Ogni H è G
Ogni F è G
∴ Qualche F è H

Per rappresentare la prima premessa, si oscuri la parte dell'insieme H che non si sovrappone all'insieme G. Per rappresentare la seconda premessa, si oscuri la parte dell'insieme F che non si sovrappone all'insieme G. Otteniamo:



La conclusione richiede che vi sia almeno un elemento dell'insieme F che sia anche elemento dell'insieme H. Pertanto, mettiamo una X (che rappresenta un elemento dell'insieme) sul bordo dell'insieme G, all'interno della zona di sovrapposizione degli insiemi H e F. Facciamo questo per lasciare aperte le due opzioni seguenti: quella per cui l'elemento di F e H è anche membro di G e quella per cui l'elemento di F e H non è membro di G. Infatti, l'informazione di cui disponiamo non ci consente di scartare una delle due possibilità in favore dell'altra. Otteniamo:



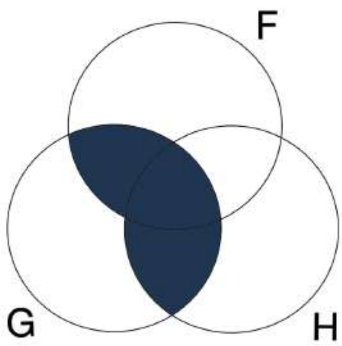
Tuttavia, tale informazione non è implicata dall'informazione contenuta nel diagramma delle premesse. Infatti, sappiamo che gli spazi bianchi potrebbero non contenere alcun elemento. Pertanto il sillogismo è invalido.

3. EEO3

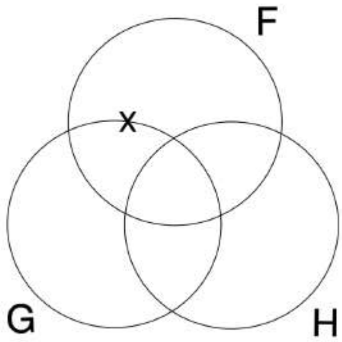
La forma di EEO3 è la seguente:

Ogni G non è H
Ogni G non è F
∴ Qualche F non è H

Per rappresentare la prima premessa, oscuriamo l'intersezione tra gli insiemi G e H. Per la seconda, oscuriamo l'intersezione tra gli insiemi G e F. Otteniamo:



La conclusione richiede che vi sia almeno un elemento dell'insieme F che non sia elemento dell'insieme H, ovvero:



Tuttavia, tale informazione non è implicata dall'informazione contenuta nel diagramma delle premesse. Infatti, sappiamo che gli spazi bianchi potrebbero non contenere alcun elemento. Pertanto il sillogismo è invalido.

4. OAO4

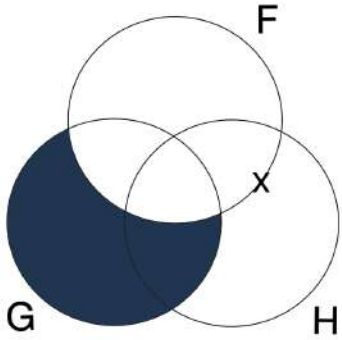
La forma di OAO4 è la seguente:

Qualche H non è G

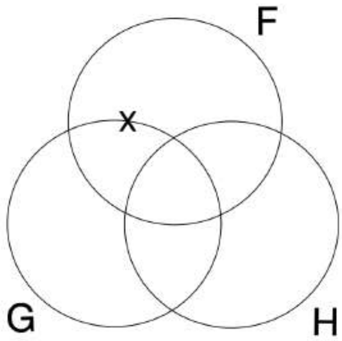
Ogni G è F

∴ Qualche F non è H

Per rappresentare la prima premessa, mettiamo una X sulla linea che demarca l'insieme F all'interno dell'insieme H, ma fuori dall'insieme G. Per rappresentare la seconda premessa, invece, oscuriamo la parte dell'insieme G che non si interseca con F. Otteniamo:



La conclusione richiede che vi sia almeno un elemento dell'insieme F che non sia elemento dell'insieme H, ovvero:



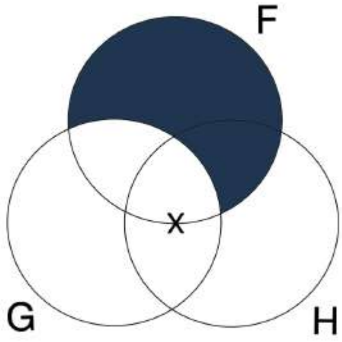
Tuttavia, tale informazione non è implicata dall'informazione contenuta nel diagramma delle premesse. Pertanto il sillogismo è invalido.

5. IAE1

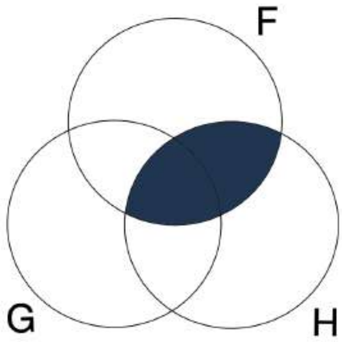
La forma di IAE1 è la seguente:

Qualche G è H
Ogni F è G
∴ Ogni F non è H

Per rappresentare la prima premessa, mettiamo una X sulla linea che demarca l'insieme F, dentro l'intersezione degli insiemi G e H. Per rappresentare la seconda premessa, oscuriamo la parte dell'insieme F che non si sovrappone all'insieme G. Otteniamo:



La conclusione richiede che non vi sia alcun elemento nell'intersezione degli insiemi F e H, ovvero:



Tuttavia, tale informazione non è implicata dall'informazione contenuta nel diagramma delle premesse. Pertanto il sillogismo è invalido.

Esercizio 7

Dimostrate per via indiretta la validità di BOCARDO (OAOIII) (aiuto: è la stessa dimostrazione fatta per BAROCOII)

Soluzione:

Dobbiamo dimostrare la validità di BOCARDO, ovvero: MOP, MAS $\vdash$ SOP.

Prova

1	(1)	MOP	A
2	(2)	MAS	A
3	(3)	$\neg$SOP	A
3	(4)	SAP	3, Contraddizione
1, 3	(5)	MOS	1, 4 BAROCO-2 (SAP, MOP $\vdash$ MOS)
1, 3	(6)	$\neg$MAS	5, Contraddizione
1, 2, 3	(7)	MAS $\wedge$ $\neg$MAS	2, 6 I$\wedge$
1, 2	(8)	SOP	3, 7 RAA

Capitolo 5

Logica del prim'ordine

5.1 Linguaggio

Esercizio 1

Dopo avere scelto il vocabolario, traducete in LPSQ (Logica predicativa senza quantificatori) i seguenti enunciati:

1. Emma è felice
2. Emma e Delia sono felici
3. Pino ama Dino
4. Gino ama se stesso
5. Pina ama Gina solo se è felice
6. Pino è sia intelligente che bello, ma non è ricco
7. Dina è bella, intelligente e ricca
8. Gino non è bello, né ricco, né intelligente
9. Se Gina è intelligente, lo sono anche Pina e Dina
10. Pino è intelligente, Dina è felice, nessuno dei due è ricco
11. Carla è attratta da Carlo se e solo se Carlo è più alto di Pino
12. Se Dino è più basso di Carlo e Carlo più basso di Gino, allora Dino è più basso di Gino
13. Pino e Dino sono ricchi ma solo Dino è felice
14. Se Carla ama Pino e Pino ama se stesso, allora Dino è felice

15. Carla, Gino e Dina vivono a Padova ma nessuno è nato lì

Soluzione:

1. Emma è felice

   Emma = e
   è felice = F

   Fe

2. Emma e Delia sono felici

   Emma = e
   Delia = d
   è felice = F

   $Fe \wedge Fd$

3. Pino ama Dino

   Pino = p
   Dino = d
   amare = A

   Apd

4. Gino ama se stesso

   Gino = g
   amare = A

   Agg

5. Pina ama Gina solo se è felice

   Pina = p
   Gina = g

amare = A
è felice = F

Interpretiamo il predicato «è felice» come se riferito a Pina. Allora:

$Apg \rightarrow Fp$

6. Pino è sia intelligente che bello, ma non è ricco

   Pino = p
   è bello = B
   è intelligente = I
   è ricco = R

   $Ip \land Bp \land \neg Rp$

7. Dina è bella, intelligente e ricca

   Dina = d
   è bella = B
   è intelligente = I
   è ricca = R

   $Bd \land Id \land Rd$

8. Gino non è bello, né ricco, né intelligente

   Gino = g
   è bello = B
   è intelligente = I
   è ricco = R

   $\neg Bg \land \neg Rg \land \neg Ig$

9. Se Gina è intelligente, lo sono anche Pina e Dina

   Gina = g
   Pina = p
   Dina = d

è intelligente = I

$Ig \rightarrow Ip \land Id$

10. Pino è intelligente, Dina è felice, nessuno dei due è ricco

    Pino = g
    Dina = d
    è felice = F
    è intelligente = I
    è ricco = R

    $Ig \land Fd \land \neg Rg \land \neg Rd$

11. Carla è attratta da Carlo se e solo se Carlo è più alto di Pino

    Carla = c
    Carlo = o
    Pino = p
    è attratto/a da = A
    è più alto di = P

    $Aco \leftrightarrow Pop$

12. Se Dino è più basso di Carlo e Carlo più basso di Gino, allora Dino è più basso di Gino

    Carlo = c
    Dino = d
    Gino = g
    è più basso di = B

    $(Bdc \land Bcg) \rightarrow Bdg$

13. Pino e Dino sono ricchi ma solo Dino è felice

    Dino = d
    Pino = p
    è ricco = R

è felice = F

$Rp \wedge Rd \wedge Fd \wedge \neg Fp$

14. Se Carla ama Pino e Pino ama se stesso, allora Dino è felice

    Carla = c
    Dino = d
    Pino = p
    amare = A
    è felice = F

    $(Acp \wedge App) \rightarrow Fd$

15. Carla, Gino e Dina vivono a Padova ma nessuno è nato lì

    Carla = c
    Dina = d
    Gino = g
    Padova = p vivere a = V
    essere nato/a = N

    $Vcp \wedge Vdp \wedge Vgp \wedge \neg Ncp \wedge \neg Ndp \wedge \neg Ngp$

Esercizio 2

Supponete di avere a che fare solamente con 5 persone:

Pino = a
Dino = b
Lino = c
Pina = d
Lina = e

Alcuni maschi, altre femmine. Dopo avere scelto il vocabolario, traducete in LPSQ (Logica predicativa senza quantificatori) i seguenti enunciati:

1. Qualche donna è felice e invece qualcuna non lo è
2. Se Pino è infelice tutte le donne lo sono
3. Tutti gli uomini amano Lina

4. Pina è felice oppure ama Pino
5. Dino e Lina si amano
6. Se Pina ama Lina allora nessun uomo è felice
7. Nessuna donna ama Pina
8. Non tutti sono nati a Verona
9. Qualcuno è nato a Padova e qualcuno non è nato a Treviso
10. La maggior parte di uomini ama Pina

Soluzione:

1. Qualche donna è felice e invece qualcuna non lo è

   è felice = F

   $(Fd \wedge \neg Fe) \vee (Fe \wedge \neg Fd)$

2. Se Pino è infelice tutte le donne lo sono

   è infelice = I

   $Ip \rightarrow (Id \wedge Ie)$

3. Tutti gli uomini amano Lina

   amare = A

   $Aae \wedge Abe \wedge Ace$

4. Pina è felice oppure ama Pino

   amare = A
   è felice = F

   $Fd \vee Ada$

5. Dino e Lina si amano

   amare = A

   $Abe \land Aeb$

6. Se Pina ama Lina allora nessun uomo è felice

   amare = A
   è felice = F

   $Ade \rightarrow (\neg Fa \land \neg Fb \land \neg Fc)$

7. Nessuna donna ama Pina

   amare = A

   $\neg Add \land \neg Aed$

8. Non tutti sono nati a Verona

   Verona = v
   essere nato/a = N

   $\neg Nav \lor \neg Nbv \lor \neg Ncv \lor \neg Ndv \lor \neg Ndv$

   Si noti che questa traduzione in LPSQ contempla anche la possibilità che nessuno sia nato a Verona, ovvero il caso in cui tutti e 5 i disgiunti siano veri. Tuttavia, comunemente, quando proferiamo un enunciato come «Non tutti sono nati a Verona» intendiamo non solo che c'è almeno una persona tra quelle a cui ci riferiamo che non è nata a Verona, ma anche che c'è qualcuno che ci è nato. Rendere anche questo aspetto del significato dell'enunciato comporta però un notevole allungamento della formalizzazione che qui non riportiamo.

9. Qualcuno è nato a Padova e qualcuno non è nato a Treviso

   Padova = p
   Treviso = t

essere nato/a = N

$(Nap \vee Nbp \vee Ncp \vee Ndp \vee Nep) \wedge (\neg Nat \vee \neg Nbt \vee \neg Nct \vee \neg Ndt \vee \neg Net)$

10. La maggior parte degli uomini ama Pina

    amare = A

    $(Aad \wedge Abd \wedge \neg Acd) \vee (Abd \wedge Acd \wedge \neg Aad) \vee (Aad \wedge Acd \wedge \neg Abd)$

    Commento: per tradurre in LPSQ l'enunciato abbiamo interpretato «la maggior parte degli uomini» come «più della metà degli uomini, ma non tutti».

Esercizio 3

Supponete di essere in un'aula con 4 banchi frequentata da 3 studenti: Bina, Bino e Gina.

1	2
3	4

Notate che i banchi contigui sono l'1 e il 2 ed il 3 e il 4. Non lo sono l'1 ed il 3 ed il 2 ed il 4. Il 3 è dietro all'1 ed il 4 dietro al 2. Provate a tradurre questi enunciati, scegliendo il vocabolario adatto:

1. Nessuno è presente
2. Bina e Bino occupano banchi contigui
3. Gina occupa il banco dietro a quello occupato da Bino
4. Banchi contigui a banchi occupati sono occupati

Soluzione:

Bino = a
Bina = b
Gina = c

1. Nessuno è presente

   è presente = P

   $\neg Pa \wedge \neg Pb \wedge \neg Pc$

2. Bina e Bino occupano banchi contigui

   occupare il banco = O

   $(Oa1 \wedge Ob2) \vee (Oa2 \wedge Ob1) \vee (Oa3 \wedge Ob4) \vee (Oa4 \wedge Ob3)$

3. Gina occupa il banco dietro a quello occupato da Bino

   occupare il banco = O

   $(Oc3 \wedge Oa1) \vee (Oc4 \wedge Oa2)$

4. Banchi contigui a banchi occupati sono occupati

   $((Oa1 \vee Ob1 \vee Oc1) \leftrightarrow (Oa2 \vee Ob2 \vee Oc2)) \wedge ((Oa3 \vee Ob3 \vee Oc3) \leftrightarrow (Oa4 \vee Ob4 \vee Oc4))$

Esercizio 4

Fornite una traduzione dei seguenti enunciati:

1. Vi è una sola Parigi.
2. Bambi odia almeno due cinghiali.
3. Solo due cinghiali della foresta odiano Bambi.
4. Bambi odia tutti ad eccezione di se stesso.
5. Ogni cane ha esattamente una coda.
6. Gozzilla odia Bambi e qualcun altro odia Gozzilla.
7. Bambi non è stato mangiato da Gozzilla, ma da qualcun altro.

8. Gozzilla odia tutti ad eccezione di Bambi.
9. Vi è un pesce che è più vecchio di tutti gli altri pesci.
10. Ci sono due giovani pesci che chiaccherano.
11. Ci sono due giovani pesci che chiaccherano ed un pesce anziano che fischietta.
12. Ci sono esattamente due libri sul tavolo.
13. Vi è esattamente un numero primo dispari.
14. Esiste esattamente un numero dispari ed è primo.
15. Nessuna persona monogama ha più di una moglie.
16. Tutti i cani sono mammiferi.
17. Alcuni squali sono ovovipari.
18. Nessun pesce è dorato.
19. Non tutti i pesci sono pericolosi.
20. Alcuni primati e roditori sono arboricoli.
21. Tutti e solo i marsupiali sono buffi.
22. Nessun pesce è alato a meno che non sia strano.
23. Gli animali si comportano normalmente se non osservati.
24. Gli animali si comportano normalmente solo se non osservati.
25. Qualche squalo è un pesce pinnato, ma non tutti i pesci pinnati sono squali.
26. Nessun passero costruisce un nido a meno che non abbia un partner.
27. Nessun organismo che è parassitario è un predatore.
28. Tutti i predatori sono non erbivori.
29. Gigi può fare ogni magia.
30. Gigi non può fare qualsiasi magia.
31. Gigi non può fare nessuna magia.
32. Qualcosa mangia qualcosa.
33. Tutto mangia tutto.
34. Ogni cosa mangia sé stessa.

35. Qualcosa mangia sé stesso.

36. Niente mangia sé stesso.

37. Qualcosa non mangia niente.

38. Alcuni pesci sono più piccoli di ogni mammifero.

39. Se un organismo è simbiotico con un pesce pagliaccio allora è un anemone di mare.

40. C'è una scimmia che spulcia tutte e sole le scimmie che non spulciano sé stesse.

Soluzione:

Si ricordi che:

(1) la traduzione formale non è unica. L'importante è che le diverse formalizzazioni di un enunciato siano equivalenti;

(2) $a \neq b$ corrisponde a $\neg(a = b)$.

1. Vi è una sola Parigi.

   p = Parigi

   $\exists x(x = p \wedge \forall y(y = p \to y = x))$

2. Bambi odia almeno due cinghiali.

   b = Bambi
   Oxy = x odia y
   C = essere un cinghiale

   $\exists x \exists y(Cx \wedge Cy \wedge Obx \wedge Oby \wedge x \neq y)$

3. Solo due cinghiali della foresta odiano Bambi.

   b = Bambi
   Oxy = x odia y

C = essere un cinghiale della foresta

$\exists x \exists y(Cx \wedge Cy \wedge x \neq y \wedge Oxb \wedge Oyb \wedge \forall z((Cz \wedge Ozb) \rightarrow (z = x \vee z = y)))$

4. Bambi odia tutti ad eccezione di se stesso.

   b = Bambi
   Oxy = x odia y

   $\forall x(x \neq b \rightarrow Obx) \wedge \neg Obb$

5. Ogni cane ha esattamente una coda.

   D = essere un cane
   C = essere una coda
   Hxy = x ha y

   $\forall x(Dx \rightarrow \exists y(Cy \wedge Hxy \wedge \neg \exists z(Cz \wedge Hxz \wedge z \neq y))$

6. Gozzilla odia Bambi e qualcun altro odia Gozzilla.

   b = Bambi
   g = Gozzilla
   Oxy = x odia y

   $Ogb \wedge \exists x(Oxg \wedge x \neq b \wedge x \neq g)$

7. Bambi non è stato mangiato da Gozzilla, ma da qualcun altro.

   b = Bambi
   g = Gozzilla
   Mxy = x ha mangiato y

   $\exists x(Mxb \wedge x \neq g) \wedge \neg Mgb$

8. Gozzilla odia tutti ad eccezione di Bambi.

   b = Bambi
   g = Gozzilla

Oxy = x odia y

$\forall x(x \neq b \to Ogx) \land \neg Ogb$

9. Vi è un pesce che è più vecchio di tutti gli altri pesci.

   P = essere un pesce
   Vxy = x è più vecchio di y

   $\exists x(Px \land \forall y(Py \land y \neq x \to Vxy))$

10. Ci sono due giovani pesci che chiacchierano.

    P = essere un pesce
    C = star chiacchierando
    G = essere giovane

    $\exists x \exists y(Px \land Gx \land Py \land Gy \land x \neq y \land Cx \land Cy)$

11. Ci sono due giovani pesci che chiacchierano ed un pesce anziano che fischietta.

    P = essere un pesce
    C = star chiacchierando
    G = essere giovane
    A = essere anziano
    F = star fischiettando

    $\exists x \exists y \exists z(Px \land Gx \land Py \land Gy \land x \neq y \land Cx \land Cy \land Pz \land Az \land Fz \land x \neq z \land y \neq z)$

12. Ci sono esattamente due libri sul tavolo.

    L = essere un libro
    T = essere sul tavolo

    $\exists x \exists y(Lx \land Tx \land Ly \land Ty \land x \neq y \land \forall z((Lz \land Tz) \to (z = x \lor z = y)))$

13. Vi è esattamente un numero primo dispari.

    N = essere un numero
    P = essere primo
    D = essere dispari

    $\exists x(Nx \wedge Px \wedge Dx \wedge \forall y((Ny \wedge Py \wedge Dy) \rightarrow y = x))$

14. Esiste esattamente un numero dispari ed è primo.

    Essere un numero dispari = D
    Essere un numero primo = P

    $\exists x(Dx \wedge \forall y(Dy \rightarrow y = z) \wedge Px)$

15. Nessuna persona monogama ha più di una moglie.

    Essere monogamo = U
    x è moglie di y = Mxy

    $\neg\exists x(Ux \wedge \exists y \exists z(Myx \wedge Mzx \wedge \neg y = x))$

16. Tutti i cani sono mammiferi.

    Cane = D
    Mammifero = M

    $\forall x(Dx \rightarrow Mx)$

17. Alcuni squali sono ovovipari.

    Squali = S
    Ovovipari = O

    $\exists x(Sx \wedge Ox)$

18. Nessun pesce è dorato.

    Pesce = F
    Dorato = D

    $\forall x(Fx \rightarrow \neg Dx)$

19. Non tutti i pesci sono pericolosi.

    Pesce = F
    Pericoloso = P

    $\neg\forall x(Fx \rightarrow Px)$

20. Alcuni primati e roditori sono arboricoli.

    Primate = P
    Roditore = R
    Arboricolo = A

    $\exists x(Px \wedge Ax) \wedge \exists x(Rx \wedge Ax)$

21. Tutti e solo i marsupiali sono buffi.

    Marsupiale = M
    Buffo = P

    $\forall x(Mx \leftrightarrow Px)$

22. Nessun pesce è alato a meno che non sia strano.

    Pesce = F
    Alato = W
    Strano = E

    $\forall x(Fx \rightarrow \neg Wx \vee Ex)$

23. Gli animali si comportano normalmente se non osservati.

Animali = A
Comportarsi normalmente = N
Essere osservati = O

$\forall x(Ax \rightarrow (\neg Ox \rightarrow Nx))$

24. Gli animali si comportano normalmente solo se non osservati.

Animali = A
Comportarsi normalmente = N
Essere osservati = O

$\forall x(Ax \rightarrow (Nx \rightarrow \neg Ox))$

25. Qualche squalo è un pesce pinnato, ma non tutti i pesci pinnati sono squali.

Squalo = S
Pesce = F
Pinnato = P

$\exists x(Sx \land (Px \land Fx)) \land \neg\forall x(Px \land Fx \rightarrow Sx)$

26. Nessun passero costruisce un nido a meno che non abbia un partner.

Passero = S
Costruire un nido = N
Avere un partner = M

$\forall x(Sx \rightarrow (\neg Nx \lor Mx))$

27. Nessun organismo che è parassitario è un predatore.

Organismo = O
Parassitario = E
Predatore = P

$\forall x(Ox \land Ex \rightarrow \neg Px)$

28. Tutti i predatori sono non erbivori.

    Predatore = P
    Erbivoro = E

    $\forall x(Px \rightarrow \neg Ex)$

29. Gigi può fare ogni magia.

    Cose che può fare Gigi = S
    Magia = T

    $\forall x(Tx \rightarrow Sx)$

30. Gigi non può fare qualsiasi magia.

    Cose che può fare Gigi = S
    Magia = T

    $\neg\forall x(Tx \rightarrow Sx)$

31. Gigi non può fare nessuna magia.

    Cose che Gigi può fare = S
    Magia = T

    $\forall x(Tx \rightarrow \neg Sx)$

32. Qualcosa mangia qualcosa.

    x mangia y = Bxy

    $\exists x\exists yBxy$

33. Tutto mangia tutto.

    x mangia $y = Bxy$

    $\forall x \forall y Bxy$

34. Ogni cosa mangia sé stessa.

    x mangia $y = Bxy$

    $\forall x Bxx$

35. Qualcosa mangia sé stesso.

    x mangia $y = Bxy$

    $\exists x Bxx$

36. Niente mangia sé stesso.

    x mangia $y = Bxy$

    $\forall x \neg Bxx$

37. Qualcosa non mangia niente.

    x mangia $y = Bxy$

    $\exists x \forall y \neg Bxy$

38. Alcuni pesci sono più piccoli di ogni mammifero.

    Pesce = F
    Mammifero = M
    x è più piccolo di $y = Sxy$

    $\exists x(Fx \wedge \forall y(My \rightarrow Sxy))$

39. Se un organismo è simbiotico con un pesce pagliaccio allora è un anemone di mare.

    Pesce pagliaccio = C
    x è simbiotico con y = Sxy
    Anemone di mare = B

    $\forall x(\exists y(Cy \wedge Sxy) \rightarrow Bx)$

40. C'è una scimmia che spulcia tutte e sole le scimmie che non spulciano sé stesse.

    Scimmia = M
    x spulcia y = Gxy

    $\exists x(Mx \wedge \forall y(My \rightarrow (Gxy \leftrightarrow \neg Gyy)))$

Esercizio 5

Formalizzare i seguenti enunciati nel linguaggio della logica del primo ordine:

1. Marta e Gianni sono andati in vacanza.
2. Marta è all'università, ma Gianni è andato in vacanza.
3. Marta è un'amica di Gianni che si trova all'università.
4. Marta è all'università, ma tutti i suoi amici sono andati in vacanza.
5. Tutti gli amici di Marta che non sono all'università sono andati in vacanza.
6. Gli amici di Marta sono in vacanza ma quelli di Gianni sono tutti all'università.
7. Ogni amico di Marta che è andato in vacanza ha un amico che è all'università.
8. Marta ha degli amici all'università i cui amici sono anche amici di Gianni.
9. Tutti gli amici di Marta sono andati in vacanza, tranne Gianni.
10. Gianni ha degli amici che non sono amici di Marta.

11. Gianni non ha amici che non siano anche amici di Marta.
12. Nessuno degli amici di Gianni è amico di Marta.
13. Gianni e Marta hanno un amico in comune che si trova all'università.
14. Marta ha degli amici in vacanza che sono all'università.
15. Tutti gli amici di Marta hanno un amico in comune con Gianni.
16. Tutti gli amici di Marta hanno un amico in comune con un amico di Gianni.
17. Tutti gli amici di Marta che sono all'università hanno un amico in comune con qualche amico di Gianni che si trova in vacanza.
18. Solo gli amici di Marta che si trovano in ospedale hanno amici in comune con qualche amico di Gianni.

Soluzione:

Marta = m
Gianni = g
andare/essere in vacanza = V
essere/trovarsi all'università = U
essere amico/a di = A
trovarsi in ospedale = O

1. Marta e Gianni sono andati in vacanza.

   $Vm \wedge Vg$

2. Marta è all'università, ma Gianni è andato in vacanza.

   $Um \wedge Vg$

3. Marta è un'amica di Gianni, il quale si trova all'università.

   $Amg \wedge Ug$

4. Marta è all'università, ma tutti i suoi amici sono andati in vacanza.

   $Um \wedge \forall x(Axm \rightarrow Vx)$

5. Tutti gli amici di Marta che non sono all'università sono andati in vacanza.

   $\forall x((Axm \land \neg Ux) \rightarrow Vx)$

6. Gli amici di Marta sono in vacanza ma quelli di Gianni sono tutti all'università.

   $\forall x(Axm \rightarrow Vx) \land \forall y(Ayg \rightarrow Uy)$

   Commento: si noti che non era necessario l'uso di due variabili distinte.

7. Ogni amico di Marta che è andato in vacanza ha un amico che è all'università.

   $\forall x((Axm \land Vx) \rightarrow \exists y(Ayx \land Uy))$

8. Marta ha degli amici i cui amici sono anche amici di Gianni.

   $\exists x(Axm \land \forall y(Ayx \rightarrow Ayg))$

9. Tutti gli amici di Marta sono andati in vacanza, tranne Gianni.

   $\forall x((Axm \land \neg(x = g)) \rightarrow Vx) \land Agm \land \neg Vg$

10. Gianni ha degli amici che non sono amici di Marta.

    $\exists x(Axg \land \neg Axm)$

11. Gianni non ha amici che non siano anche amici di Marta.

    $\neg\exists x(Axg \land \neg Axm)$

12. Nessuno degli amici di Gianni è amico di Marta.

    $\forall x(Axg \rightarrow \neg Axm)$

13. Gianni e Marta hanno un amico in comune che si trova all'università.

    $\exists x(Axg \wedge Axm \wedge Ux)$

14. Marta ha degli amici in vacanza che sono all'università.

    $\exists x(Axm \wedge Vx \wedge Ux)$

15. Tutti gli amici di Marta hanno un amico in comune con Gianni.

    $\forall x(Axm \rightarrow \exists y(Ayg \wedge Ayx))$

16. Tutti gli amici di Marta hanno un amico in comune con un amico di Gianni.

    $\forall x(Axm \rightarrow \exists y(Ayg \wedge \exists z(Azy \wedge Azx)))$

17. Tutti gli amici di Marta che sono all'università hanno un amico in comune con qualche amico di Gianni che si trova in vacanza.

    $\forall x((Axm \wedge Ux) \rightarrow \exists y(Ayg \wedge Vy \wedge \exists z(Azy \wedge Azx)))$

18. Solo gli amici di Marta che si trovano in ospedale hanno amici in comune con qualche amico di Gianni.

    $\forall x(\exists y(Ayg \wedge \exists z(Azy \wedge Azx)) \rightarrow (Axm \wedge Ox))$

Esercizio 6

Traducete nel linguaggio della logica del primo ordine i seguenti enunciati:

1. Tutti dicono qualcosa a qualcuno.
2. Tutti non hanno detto alcunché a qualcuno.
3. Nessuno ha detto niente a nessuno.
4. Tutti dicono qualcosa a tutti.

5. Tutti non dicono alcunché a qualcuno.
6. Tutti non dicono alcunché a nessuno.
7. C'è un rettile più piccolo di un gatto ma più grande di un cane.
8. Alcuni pesci nuotano più lentamente degli esseri umani.
9. Alcune balene mangiano solo pesci veloci.
10. Le code dei giaguari sono più lunghe delle code dei gatti.
11. Solo gli attori celebri possono essere eletti presidenti.
12. I rinoceronti eccetto le femmine sono animali pacifici.
13. Tutti i professori, tranne quelli di logica, sono noiosi e qualche professore di logica è noioso.
14. Vi è almeno uno studente che capirà la logica e uno studente che sarà apprezzato da tutti i professori.
15. Ogni professore annoia qualche studente e gli studenti che capiscono tutto sono annoiati da qualunque professore.
16. Ogni professore è apprezzato dagli studenti che capiscono la logica.
17. Se Dio ha creato qualcosa allora Dio ha creato ogni cosa
18. Dio è padre di tutti.
19. Rettili ed anfibi non sono endotermici.
20. Fra i ragni, solo le tarantole e le vedove nere sono velenosi.
21. Tutti e solo i marsupiali hanno le tasche.
22. Alcuni organismi sono cordati ed alcuni organismi sono molluschi, ma niente è sia un cordato che un mollusco.
23. Un mammifero con le ali è un pipistrello.
24. Un mammifero con le ali sta volando.
25. I morsi dei serpenti sono a volte fatali.
26. Non tutto ciò che luccica è oro.
27. Nessuno odia se stesso.
28. Godzilla odia Bambi.
29. Godzilla odia tutti.

30. Non tutti i figli di marinai sono marinai.
31. Pino è un marinaio o un figlio di marinaio.
32. Se un marinaio ha figli o figlie allora è felice.
33. Alcune balene non mangiano qualunque pesce si muova velocemente.
34. Le persone razionali non sono popolari.
35. Non si dà il caso che tutti coloro che sono impopolari siano irrazionali.
36. Se l'arte è sia impopolare che irrazionale, allora gli studenti di logica non sono né tutti popolari né tutti logici.
37. Coloro che non si fidano di nessuno sono paranoici oppure burocrati.

Soluzione:

Si noti che, per semplificare la traduzione formale, talvolta si assume implicitamente che le variabili varino talvolta sulle persone, talvolta su altri domini di individui (ad esempio l'insieme di ciò che può essere detto da qualcuno). A rigore, andrebbe specificata anche la restrizione di ciascun dominio che si assume implicitamente.

1. Tutti dicono qualcosa a qualcuno

   dire = D (si tratta di un predicato a 3 posti: Dxyz = «x dice y a z»)

   $\forall x \exists y \exists z (Dxyz)$

2. Tutti non hanno detto alcunché a qualcuno

   dire = D

   $\forall x \forall y \exists z (\neg Dxyz)$

3. Nessuno ha detto niente a nessuno

   dire = D

   $\forall x \forall y \forall z (\neg Dxyz)$

4. Tutti dicono qualcosa a tutti

   dire = D

   $\forall x \exists y \forall z(Dxyz)$

5. Tutti non dicono alcunché a qualcuno

   dire = D

   $\forall x \forall y \exists z(\neg Dxyz)$

6. Tutti non dicono alcunché a nessuno

   dire = D

   $\neg \exists x \exists y \exists z(Dxyz)$

7. C'è un rettile più piccolo di un gatto ma più grande di un cane

   Essere un rettile = R
   Essere un gatto = G
   Essere un cane = C
   Essere più piccolo di = P

   $\exists x(Rx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Pxy) \wedge \forall z(Cz \rightarrow Pzx))$

   Commento: abbiamo optato per la traduzione dell'enunciato inteso come «C'è un rettile più piccolo di un qualsiasi (ogni) gatto ma più grande di un qualsiasi (ogni) cane». Ovviamente, tale enunciato sarà (se valutato nel nostro mondo attuale) falso, dal momento che generalmente un cane è più grande di un gatto.

8. Alcuni pesci nuotano più lentamente degli esseri umani

   Essere un pesce = P
   Essere un umano = U
   Nuotare più lentamente di = L

   $\exists x(Px \land \forall y(Uy \to Lxy))$

9. Alcune balene mangiano solo pesci veloci

   Essere un pesce = P
   Essere una balena = B
   Essere veloce = V
   Mangiare = M

   $\exists x(Bx \land \forall y(Mxy \to (Py \land Vy)))$

10. Le code dei giaguari sono più lunghe delle code dei gatti

    Coda di un giaguaro = G
    Coda di un gatto = C
    Essere più lungo/a di = L

    $\forall x(Gx \to \forall y(Cy \to Lxy))$

11. Solo gli attori celebri possono essere eletti presidenti

    Essere eletto presidente = P
    Essere un attore celebre = A

    $\forall x(Px \to Ax)$

12. I rinoceronti eccetto le femmine sono animali pacifici

    Essere un rinoceronte = R
    Essere una femmina = F
    Essere un animale = A
    Essere pacifico = P

    $\forall x((Rx \land \neg Fx) \to (Ax \land Px))$

13. Tutti i professori, tranne quelli di logica, sono noiosi e qualche professore di logica è noioso

    Essere un professore = P
    Essere una professore di logica = L
    Essere noioso = N

    $\forall x((Px \land \neg Lx) \to Nx) \land \exists x(Lx \land Nx)$

14. Vi è almeno uno studente che capirà la logica e uno studente che sarà apprezzato da tutti i professori

    Essere uno studente = S
    Capire = C
    Logica = l
    Essere apprezzato da = A
    Essere un professore = P

    $\exists x(Sx \land Cxl) \land \exists y(Sy \land \forall z(Pz \to Ayz))$

15. Ogni professore annoia qualche studente e gli studenti che capiscono tutto sono annoiati da qualunque professore

    Essere un professore = P
    Essere uno studente = S
    Annoiare = A
    Capire = C

    $\forall x(Px \to \exists y(Sy \land Axy)) \land \forall z((Sz \land \forall j(Czj)) \to \forall k(Pk \to Azk))$

16. Ogni professore è apprezzato dagli studenti che capiscono la logica

    Essere un professore = P
    Essere uno studente = S
    Annoiare = A
    Capire = C
    Logica = l

    $\forall x(Px \rightarrow \forall y((Sy \wedge Cyl) \rightarrow Ayx))$

17. Se Dio ha creato qualcosa allora Dio ha creato ogni cosa

    Dio = d
    Creare = C

    $\exists x(Cdx) \rightarrow \forall y(Cdy)$

18. Dio è padre di tutti

    Dio = d
    Essere padre di = P

    $\forall x(Pdx)$

19. Rettili ed anfibi non sono endotermici

    Rettili = R
    Anfibi = A
    Essere endotermici = E

    $\forall x(Rx \rightarrow \neg Ex) \wedge \forall x(Ax \rightarrow \neg Ex)$

20. Fra i ragni, solo le tarantole e le vedove nere sono velenosi

    Ragni = R
    Tarantole = T
    Vedove nere = V
    Essere velenoso = P

    $\forall x((Rx \wedge \neg Tx \wedge \neg Vx) \to \neg Px) \wedge \forall x(Tx \to Px) \wedge \forall x(Vx \to Px)$

21. Tutti e solo i marsupiali hanno le tasche

    Marsupiale = M
    avere le tasche = T

    $\forall x(Mx \leftrightarrow Tx)$

22. Alcuni organismi sono cordati ed alcuni organismi sono molluschi, ma niente è sia un cordato che un mollusco

    Organismo = O
    Cordato = C
    Mollusco = M

    $\exists x(Ox \wedge Cx) \wedge \exists x(Ox \wedge Mx) \wedge \neg \exists x(Cx \wedge Mx)$

23. Un mammifero con le ali è un pipistrello

    Mammifero = M
    Avere le ali = W
    Pipistrello = B

    $\forall x(Mx \wedge Wx \to Bx)$

24. Un mammifero con le ali sta volando

    Mammifero = M
    Avere le ali = W
    Star volando = F

    $\exists x((Mx \wedge Wx) \wedge Fx)$

25. I morsi dei serpenti sono a volte fatali

    Essere fatale = F
    morso di serpente = M

    $\exists x(Mx \wedge Fx)$

26. Non tutto ciò che luccica è oro

    Luccicare = L
    Essere oro = O

    $\exists x(Lx \wedge \neg Ox)$

27. Nessuno odia se stesso

    x odia y = Oxy
    $\neg \exists x(Oxx)$

28. Godzilla odia Bambi

    Odiare = O
    Godzilla = g
    Bambi = b

    Ogb

29. Godzilla odia tutti

x odia $y = Oxy$
Godzilla $= g$

$\forall x Ogx$

30. Non tutti i figli di marinai sono marinai

Essere marinaio $= M$
x è figlio di $y = Fxy$

$\exists x \exists y (Mx \wedge Fyx \wedge \neg My)$

31. Pino è un marinaio o un figlio di marinaio

Essere marinaio $= M$
x è figlio di $y = Fxy$
Pino $= p$

$Mp \vee \exists x (Mx \wedge Fpx)$

32. Se un marinaio ha figli o figlie allora è felice

Essere Marinaio $= M$
x è figlio di $y = Fxy$
Essere felice $= H$

$\forall x (\exists y Fyx \rightarrow Hx)$

33. Alcune balene non mangiano qualunque pesce si muova velocemente

Balena $= W$
Pesce $= F$
Essere Veloce $= V$
x mangia $y = Mxy$

$\exists x (Wx \wedge \forall y (Fy \wedge Vy \rightarrow \neg Mxy))$

34. Le persone razionali non sono popolari

    Essere una persona razionale = R
    Essere popolare = P

    $\forall x(Rx \to \neg Px)$

35. Non si dà il caso che tutti coloro che sono impopolari siano irrazionali

    Essere una persona irrazionale = I
    essere impopolare = U

    $\neg\forall x(Ux \to Ix)$

    Se irrazionale = non razionale (R) e impopolare = non popolare (P) si ha:

    $\neg\forall x(\neg Px \to \neg Rx)$

36. Se l'arte è sia impopolare che irrazionale, allora gli studenti di logica non sono né tutti popolari né tutti logici

    Essere irrazionale = I
    Essere popolare = P
    (Impopolare = $\neg P$)

    Essere uno studente di logica = S
    Essere un logico = L

    Arte = A

    $\exists x(Ax \wedge \neg Px) \to \exists x(Sx \wedge \neg Px) \wedge \exists x(Sx \wedge Lx)$

37. Coloro che non si fidano di nessuno sono paranoici oppure burocrati

    x si fida di y = Fxy
    Essere paranoici = P
    Essere burocrati = B

    $\forall x(\neg\exists y Fxy \to (Px \vee Bx))$

5.2 Semantica

Esercizio 7

Per ciascuna delle seguenti ffbf determinare un dominio e un'interpretazione (Modello) che la rendono vera e un dominio e un'interpretazione (Modello) che la rendono falsa.

1. $F(a) \wedge \neg P(a)$
2. $F(a) \wedge F(b) \wedge \neg F(c)$
3. $F(c) \rightarrow (G(b) \wedge P(b))$
4. $(G(a) \vee P(a)) \wedge K(d)$
5. $(G(a) \wedge G(b)) \rightarrow (F(a) \vee F(b))$
6. $G(a) \leftrightarrow (F(a) \wedge G(b) \wedge K(c))$
7. $(F(a) \rightarrow G(a)) \rightarrow (G(b) \rightarrow P(c))$
8. $(F(b) \vee F(c)) \leftrightarrow (G(a) \rightarrow G(c))$

Soluzione:

Conveniamo di indicare il dominio con $\mathcal{D} = \{...\}$ e l'interpretazione di ciascun predicato con $\pi(..) = \{...\}$.

1. $F(a) \wedge \neg P(a)$

   $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$

   Modello che la rende vera:

   $\pi(F) = \{a, b\}$
   $\pi(P) = \{b\}$

Modello che la rende falsa:

$\pi(F) = \{a,b,c\}$
$\pi(P) = \{a\}$

2. $F(a) \wedge F(b) \wedge \neg F(c)$

   $\mathcal{D} = \{a,b,c\}$

   Modello che la rende vera:

   $\pi(F) = \{a,b\}$

   Modello che la rende falsa:

   $\pi(F) = \{c\}$

3. $F(c) \rightarrow (G(b) \wedge P(b))$

   $\mathcal{D} = \{a,b,c\}$

   Modello che la rende vera:

   $\pi(F) = \{c,a\}$
   $\pi(G) = \{a,b\}$
   $\pi(P) = \{a,b\}$

   Modello che la rende falsa:

   $\pi(F) = \{a,c\}$
   $\pi(G) = \{a,c\}$
   $\pi(P) = \{a,b\}$

4. $(G(a) \vee P(a)) \wedge K(d)$

   $\mathcal{D} = \{a,b,c,d\}$

Modello che la rende vera:

$\pi(G) = \{a\}$
$\pi(P) = \{b, c, d\}$
$\pi(K) = \{d\}$

Modello che la rende falsa:

$\pi(G) = \{b, c, d\}$
$\pi(P) = \{b, c, d\}$
$\pi(K) = \{d, a, b\}$

5. $(G(a) \wedge G(b)) \rightarrow (F(a) \vee F(b))$

   $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$

   Modello che la rende vera:

   $\pi(G) = \{a, c\}$
   $\pi(F) = \{a\}$

   Modello che la rende falsa:

   $\pi(G) = \{a, b, c\}$
   $\pi(F) = \{c\}$

6. $G(a) \leftrightarrow (F(a) \wedge G(b) \wedge K(c))$

   $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$

   Modello che la rende vera:

   $\pi(G) = \{a, b\}$
   $\pi(F) = \{a, b, c\}$
   $\pi(K) = \{c\}$

   Modello che la rende falsa:

   $\pi(G) = \{b, c\}$
   $\pi(F) = \{a\}$
   $\pi(K) = \{c\}$

7. $(F(a) \to G(a)) \to (G(b) \to P(c))$

   $\mathcal{D} = \{a, b, c, d\}$

   Modello che la rende vera:

   $\pi(F) = \{a\}$
   $\pi(G) = \{a, b\}$
   $\pi(P) = \{c\}$

   Modello che la rende falsa:

   $\pi(F) = \{c\}$
   $\pi(G) = \{a, b\}$
   $\pi(P) = \{a\}$

8. $(F(b) \vee F(c)) \leftrightarrow (G(a) \to G(c))$

   $\mathcal{D} = \{a, b, c, d\}$

   Modello che la rende vera:

   $\pi(F) = \{b, c\}$
   $\pi(G) = \{a, c\}$

   Modello che la rende falsa:

   $\pi(F) = \{a\}$
   $\pi(G) = \{a, c\}$

Esercizio 8

Considerate il seguente dominio: $\mathcal{D} = \{a, b, c, d\}$. Siano F, G e H tre predicati a cui vengono assegnati le seguenti interpretazioni, rispettivamente:

$\pi(F) = \{a, b, d\}$
$\pi(G) = \{c, d\}$
$\pi(H) = \{b\}$.

Supponete che la denotazione delle costanti sia identica agli oggetti del dominio:

$\delta(a) = a$
$\delta(b) = b$
$\delta(c) = c$
$\delta(d) = d$

Dati $\mathcal{D}$ e l'interpretazione data delle parti non logiche, trovate almeno sette formule in LPSQ che risultino vere e altre sette che risultino false.

<u>Soluzione</u>:

Formule vere:

1. $Fa \land Fb \land Fd$
2. $Fa \land Gc \land Hb$
3. $Gc \rightarrow Hb$
4. $(Hb \lor Ga) \leftrightarrow Gd$
5. $\neg\neg(Hb \lor Gd)$
6. $\neg Ga \rightarrow (Fa \land Fb \land Fd)$
7. $Fc \leftrightarrow \neg(Fa \land Gc \land Hb)$

Formule false:

1. $\neg Fa$
2. $Fa \land Gc \land \neg Hb$
3. $Gc \rightarrow Ha$
4. $(\neg Ga \rightarrow (Fa \land Fb \land Fd)) \leftrightarrow Ga$
5. $Fc \lor Gb \lor Ha$
6. $(Fb \lor Gd) \land Ga$
7. $\neg Gd$

Esercizio 9

Per ciascuna delle seguenti ffbf determinare un modello che renda la fbf vera ed un modello che renda la fbf falsa.

1. $\forall x Fx$
2. $\exists x Fx$
3. $\forall x Fx \to \exists y Gy$
4. $\exists x(Fx \wedge Gx) \to \exists x(Fx \wedge Gx)$
5. $\exists x \exists y(Fy \to \neg Fx)$
6. $\forall x(Fx \to Gx) \to \forall x(Gx \to \neg Fx)$
7. $\exists x \forall y(Dyx \to \neg Dxy)$
8. $\exists x \forall y Dxy \vee \neg \forall y \exists x Dxy$
9. $\forall x \forall w((Nwx \vee Nxw) \to Nww)$
10. $\forall x(Cx \vee Dx) \leftrightarrow \exists y(Cy \wedge Dy)$

Soluzione:

1. $\forall x Fx$

   Modello che la rende vera:

   Universo: l'insieme di tutte le creature viventi

   F = l'insieme delle cose mortali

   Modello che la rende falsa:

   Universo: l'insieme $\{Aldo, Bruno, Carola\}$

   F = l'insieme $\{Aldo, Carola\}$

3. $\forall x Fx \to \exists y Gy$

   Modello che la rende vera:

   Universo: l'insieme $\{Aldo, Bruno, Carola\}$

   F = l'insieme $\{Aldo\}$

G = l'insieme $\{Bruno\}$

Modello che la rende falsa:

Universo: l'insieme $\{Aldo, Bruno, Carola\}$

F = l'insieme $\{Aldo, Bruno, Carola\}$

G = l'insieme $\{\varnothing\}$

5. $\exists x \exists y(Fy \to \neg Fx)$

Modello che la rende vera:

Universo: l'insieme di tutte le persone

F = l'insieme di tutte le femmine

Modello che la rende falsa:

Universo: l'insieme $\{Giulia, Alice\}$

F = l'insieme delle femmine

7. $\exists x \forall y(Dyx \to \neg Dxy)$

Modello che la rende vera:

Universo: l'insieme degli italiani

D = la relazione *avere un'altezza maggiore*

Modello che la rende falsa:

Universo: l'insieme degli italiani

D = la relazione *essere sposato*

Esercizio 10

Considerate le formule 1-10 ed i modelli a-c. Determinare, se ve ne sono, quali formule sono vere in ciascun modello.

1. $\forall x Fx$
2. $\exists x Fx$
3. $\forall x Fx \to \exists y Gy$
4. $\forall x Gx \lor \forall x Hx$

5. $Ha \vee \exists xGx$
6. $\exists x(Fx \vee Hx)$
7. $\forall xFx \leftrightarrow \exists y(Fy \wedge \neg Hy)$
8. $\neg\forall x(Fx \wedge Gx)$
9. $\forall xFx \wedge \neg\forall yGy$
10. $\forall xGx \leftrightarrow \exists y(Hy \wedge \neg Fy))$

Modelli:

a. $\mathcal{D} = \{a\}$, $\pi(F) = \{a\}$, $\pi(G) = \{\}$, $\pi(H) = \{\}$.

b. $\mathcal{D} = \{a, b\}$, $\pi(F) = \{a\}$, $\pi(G) = \{a, b\}$, $\pi(H) = \{\}$.

c. $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$, $\pi(F) = \{a, b, c\}$, $\pi(G) = \{a, b\}$, $\pi(H) = \{b\}$.

Soluzione:

fbf	**Modello a**	**Modello b**	**Modello c**
$\forall xFx$	V	F	V
$\exists xFx$	V	V	V
$\forall xFx \rightarrow \exists yGy$	F	V	V
$\forall xGx \vee \forall xHx$	F	V	F
$Ha \vee \exists xGx$	F	V	V
$\exists x(Fx \vee Hx)$	V	V	V
$\forall xFx \leftrightarrow \exists y(Fy \wedge \neg Hy)$	V	F	V
$\neg\forall x(Fx \wedge Gx)$	V	V	V
$\forall xFx \wedge \neg\forall yGy$	V	F	V
$\forall xGx \leftrightarrow \exists y(Hy \wedge \neg Fy))$	V	F	V

Esercizio 11

Considerate le seguenti dieci formule. Trovate un modello che renda vere le prime sei e false le ultime quattro. Considerate:

T: «triangolo»
C: «cubo»
M: «medio»
Sxy: «x è a sinistra di y»
Lxy: «x è più largo di y»

1. $\exists x \exists y Sxy$
2. $\exists x \exists y (Tx \wedge Cy)$
3. $\exists x \exists y (Tx \wedge Sxy)$
4. $\exists x \exists y ((Tx \wedge Sxy \wedge Cy)$
5. $\exists x \exists y (Mx \wedge Ty)$
6. $\exists x \exists y (Mx \wedge Lyx)$
7. $\exists x \exists y ((Mx \wedge Ty) \wedge Lyx)$
8. $\forall x \forall y Sxy$
9. $\forall x \forall y (Sxy \rightarrow Cx)$
10. $\forall x \forall y ((Cx \wedge Ty) \rightarrow Sxy)$

<u>Soluzione</u>:

Universo = $\{a, b, g\}$
$T = \{a\}$
$C = \{g\}$
$M = \{b\}$
$S = \{(a, g)\}$
$L = \{(g, b)\}$

Esercizio 12

Costruite un contromodello per ciascuna delle seguenti sequenze:

1. $\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \forall xFx \vee \forall xGx$
2. $\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Gx \to Hx) \vdash \forall x(Hx \to Fx)$
3. $\exists xFx \to \exists yGy \vdash \forall x(Fx \to Gx)$
4. $\forall xFx \to \forall xGx \vdash \forall x(Fx \to Gx)$
5. $\exists xFxx \vdash \forall x\forall yFyx$
6. $\forall y\exists xFxy \vdash \exists xFxx$
7. $\forall y\exists xFxy \vdash \exists x\forall yFxy$
8. $\exists x\exists yFxy \leftrightarrow \neg\exists xGxx, \forall y\exists xGyx \vdash \forall x\neg Fx$
9. $\forall x\neg\forall yTxy \vdash \forall x\neg\exists yTxy$
10. $\neg\forall xFx \vdash \forall x\neg Fx$
11. $\forall x(Fx \wedge Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Hx) \vdash \exists xGx$
12. $\exists xFx, \exists xGx, \exists xHx \vdash \forall x(Fx \vee Gx \to Hx)$

Soluzione:

Si ricordi che un contromodello è un modello che rende vere le premesse e falsa la conclusione.

1. $\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \forall xFx \vee \forall xGx$

   Universo = $\{a, b, c\}$
   $F = \{a, b\}$
   $G = \{a\}$

4. $\forall xFx \to \forall xGx \vdash \forall x(Fx \to Gx)$

   Universo = $\{a, b, c\}$
   $F = \{a\}$
   $G = \{b, c\}$

7. $\forall y \exists x Fxy \vdash \exists x \forall y Fxy$

   Universo = $\{x : x$ è un numero intero e positivo$\}$
   F = la relazione *maggiore di*

11. $\forall x(Fx \wedge Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Hx) \vdash \exists x Gx$

   Universo = $\{a, b, c, d\}$
   $F = \{a, b\}$
   $G = \{\varnothing\}$
   $H = \{a, b\}$

Esercizio 13

Date l'espansione dei seguenti enunciati (le costanti sono anche oggetti del dominio):

I) per il dominio $\mathcal{D} : \{a\}$;

II) per il dominio $\mathcal{D} : \{a, b\}$;

III) per il dominio $\mathcal{D} : \{a, b, c\}$;

1. $\forall x Fx \rightarrow \exists x Gx$
2. $Ha \vee \exists x Gx$
3. $\exists x(Fx \vee Hx)$
4. $\forall x(Fx \leftrightarrow \exists x(Fx \wedge \neg Gx))$
5. $\neg \forall x(Fx \wedge Gx)$
6. $\neg \forall x(Fx \wedge \neg \forall y Gy))$

Soluzione:

1. $\forall x Fx \rightarrow \exists x Gx$

I) $Fa \rightarrow Ga$

II) $Fa \wedge Fb \rightarrow Ga \vee Gb$

III) $Fa \wedge Fb \wedge Fc \rightarrow Ga \vee Gb \vee Gc$

3. $\exists x(Fx \vee Hx)$

I) $Fa \vee Ha$

II) $(Fa \vee Ha) \vee (Fb \vee Hb)$

III) $(Fa \vee Ha) \vee (Fb \vee Hb) \vee (Fc \vee Hc)$

5. $\neg\forall x(Fx \wedge Gx)$

I) $\neg(Fa \wedge Ga)$

II) $\neg((Fa \wedge Ga) \wedge (Fb \wedge Gb))$

III) $\neg((Fa \wedge Ga) \wedge (Fb \wedge Gb) \wedge (Fc \wedge Gc))$

6. $\neg\forall x(Fx \wedge \neg\forall y Gy))$

I) $\neg(Fa \wedge \neg Ga)$

II) $\neg(Fa \wedge \neg(Ga \wedge Gb)) \wedge \neg(Fb \wedge \neg(Ga \wedge Gb))$

III) $\neg(Fa \wedge \neg(Ga \wedge Gb \wedge Gc)) \wedge \neg(Fb \wedge \neg(Ga \wedge Gb \wedge Gc)) \wedge \neg(Fc \wedge \neg(Ga \wedge Gb \wedge Gc))$

Esercizio 14

Mostra un contromodello e l'espansione delle seguenti sequenze invalide.

1. $\forall xFx \to \forall xGx \vdash \forall x(Fx \to Gx)$
2. $\exists xFx \to \exists xGx \vdash \forall x(Fx \to Gx)$
3. $\exists xFx \wedge \exists xGx \vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$
4. $\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \forall xFx \vee \forall xGx$
5. $\exists x(Fx \to Gx) \vdash \exists xFx \to \exists xGx$
6. $\exists x(Fx \to Gx) \vdash \forall xFx \to \forall xGx$
7. $\forall xFx \leftrightarrow \forall xGx \vdash \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$
8. $\exists xFx \leftrightarrow \exists xGx \vdash \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$

Soluzione:

1. $\forall xFx \to \forall xGx \vdash \forall x(Fx \to Gx)$

   Contromodello:
   $U = \{a, b\}$
   $F = \{a\}$
   $G = \{\}$

   $Fa \wedge Fb \to Ga \wedge Gb \vdash (Fa \to Ga) \wedge (Fb \to Gb)$

2. $\exists xFx \to \exists xGx \vdash \forall x(Fx \to Gx)$

   Contromodello:
   $U = \{a, b\}$
   $F = \{a\}$
   $G = \{b\}$

   $Fa \vee Fb \to Ga \vee Gb \vdash (Fa \to Ga) \wedge (Fb \to Gb)$

3. $\exists xFx \wedge \exists xGx \vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$

   Contromodello:

   $U = \{a, b\}$

   $F = \{a\}$

   $G = \{b\}$

   $(Fa \vee Fb) \wedge (Ga \vee Gb) \vdash (Fa \wedge Ga) \vee (Fb \vee Gb)$

4. $\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \forall xFx \vee \forall xGx$

   Contromodello:

   $U = \{a, b\}$

   $F = \{a\}$

   $G = \{\}$

   $(Fa \vee Ga) \vee (Fb \vee Gb) \vdash (Fa \wedge Fb) \vee (Ga \wedge Gb)$

5. $\exists x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists xFx \rightarrow \exists xGx$

   Contromodello:

   $U = \{a, b\}$

   $F = \{a\}$

   $G = \{\}$

   $(Fa \rightarrow Ga) \vee (Fb \rightarrow Gb) \vdash (Fa \vee Fb) \rightarrow (Ga \vee Gb)$

6. $\exists x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall xFx \rightarrow \forall xGx$

   Contromodello:

   $U = \{a, b\}$

   $F = \{a, b\}$

   $G = \{a\}$

   $(Fa \rightarrow Ga) \vee (Fb \rightarrow Gb) \vdash (Fa \wedge Fb) \rightarrow (Ga \wedge Gb)$

7. $\forall xFx \leftrightarrow \forall xGx \vdash \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$

   Contromodello:
   $U = \{a, b\}$
   $F = \{a\}$
   $G = \{\}$

   $Fa \wedge Fb \leftrightarrow Ga \wedge Gb \vdash (Fa \leftrightarrow Ga) \wedge (Fb \leftrightarrow Gb)$

8. $\exists xFx \leftrightarrow \exists xGx \vdash \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$

   Contromodello:
   $U = \{a, b\}$
   $F = \{a\}$
   $G = \{b\}$

   $Fa \vee Fb \leftrightarrow Ga \vee Gb \vdash (Fa \leftrightarrow Ga) \wedge (Fb \leftrightarrow Gb)$

Esercizio 15

Considerate il seguente modello M:

- $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$
- $\delta(a) = 1$
- $\delta(b) = 2$
- $\delta(c) = 3$
- $\Pi(F) = \{1, 2\}$
- $\Pi(R) = \{< 1, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 3 >\}$

dite – facendo l'espansione – se le seguenti formule sono vere o false in M:

1. $\exists x(x = a \wedge Fx)$
2. $\forall x(Rxx \rightarrow x = c)$
3. $(Raa \rightarrow a = c)$

4. $\exists x((Rxx \land \forall y(Ryy \to y = x)) \land \neg Fx)$ù
5. $\forall y(Rya \leftrightarrow y = b)$

Soluzione:

1. $\exists x(x = a \land Fx)$

   Espansione: $(a = a \land Fa) \lor (b = a \land Fb) \lor (c = a \land Fc)$

   Il primo disgiunto è vero in M, quindi la formula è vera in M.

2. $\forall x(Rxx \to x = c)$

   Espansione: $(Raa \to a = c) \land (Rbb \to b = c) \land (Rcc \to c = c)$

   I tre congiunti sono tutti veri in M, quindi la formula è vera in M.

3. $(Raa \to a = c)$

   Espansione: non essendoci alcun quantificatore, non c'è nulla da espandere. La formula risulta vera in M, poiché l'antecedente del condizionale è falso in M.

4. $\exists x((Rxx \land \forall y(Ryy \to y = x)) \land \neg Fx)$

   Espansione:

   $$((Raa \land ((Raa \to a = a) \land (Rbb \to b = a) \land (Rcc \to c = a))) \land \neg Fa) \lor$$
   $$((Rbb \land ((Raa \to a = b) \land (Rbb \to b = b) \land (Rcc \to c = b))) \land \neg Fb) \lor$$
   $$((Rcc \land ((Raa \to a = c) \land (Rbb \to b = c) \land (Rcc \to c = c))) \land \neg Fc)$$

   I primi due disgiunti sono falsi in M, poiché *Raa* e *Rbb* sono falsi in M. Il terzo disgiunto è, invece, vero in M. Quindi la formula è vera in M.

5. $\forall y(Rya \leftrightarrow y = b)$

   Espansione: $(Raa \leftrightarrow a = b) \wedge (Rba \leftrightarrow b = b) \wedge (Rca \leftrightarrow c = b)$

   Il secondo congiunto è falso in M, poiché *Rba* è falso e $b = b$ è vero. Quindi la formula è falsa in M.

5.3 Alberi di refutazione

Esercizio 16

Determinate, utilizzando gli alberi, quali tra le seguenti sequenze sono valide, verificando se esiste un contromodello:

1. $Fa \vdash Fa$
2. $\exists xFx \vdash \forall xFx$
3. $\forall xFx \vdash \exists xFx$
4. $Fa \vdash \exists xFx$
5. $\exists xFx \vdash Fa$
6. $\forall x\neg Fx \vdash \neg\exists xFx$
7. $\exists x\neg Fx \vdash \neg\forall xFx$
8. $\neg\exists xFx \vdash \forall x\neg Fx$
9. $\neg\forall xFx \vdash \exists x\neg Fx$
10. $\exists x\exists y(Mx \wedge Ny) \vdash \exists x(Mx \wedge \exists yNy)$

Soluzione:

3. $\forall xFx \vdash \exists xFx$ è valida

1.	$\forall xF(x)$	premise
2.	$\neg\exists xF(x)$ ✓	premise
3.	$\forall x\neg F(x)$	2 $\neg\exists$
4.	$F(a)$	1 $\forall$
5.	$\neg F(a)$	3 $\forall$
	×	

4. $Fa \vdash \exists xFx$ è valida

1.	$F(a)$	premise
2.	$\neg\exists xF(x)$ ✓	premise
3.	$\forall x\neg F(x)$	2 $\neg\exists$
4.	$\neg F(a)$	3 $\forall$
	×	

6. $\forall x\neg Fx \vdash \neg\exists xFx$ è valida

1.	$\forall x\neg F(x)$	premise
2.	$\neg\neg\exists xF(x)$ ✓	premise
3.	$\exists xF(x)$ ✓	2 $\neg\neg$
4.	$F(a)$	3 $\exists$
5.	$\neg F(a)$	1 $\forall$
	×	

8. $\neg\exists xFx \vdash \forall x\neg Fx$ è valida

1.	$\neg\exists x F(x)$ ✓	premise
2.	$\neg\forall x\neg F(x)$ ✓	premise
3.	$\forall x\neg F(x)$	1 $\neg\exists$
4.	$\exists x\neg\neg F(x)$ ✓	2 $\neg\forall$
5.	$\neg\neg F(a)$ ✓	4 $\exists$
6.	$F(a)$	5 $\neg\neg$
7.	$\neg F(a)$	3 $\forall$
	×	

9. $\neg\forall xFx \vdash \exists x\neg Fx$ è valida

1.	$\neg\forall x F(x)$ ✓	premise
2.	$\neg\exists x\neg F(x)$ ✓	premise
3.	$\exists x\neg F(x)$ ✓	1 $\neg\forall$
4.	$\forall x\neg\neg F(x)$	2 $\neg\exists$
5.	$\neg F(a)$	3 $\exists$
6.	$\neg\neg F(a)$ ✓	4 $\forall$
7.	$F(a)$	6 $\neg\neg$
	×	

10. $\exists x \exists y(Mx \wedge Ny) \vdash \exists x(Mx \wedge \exists y Ny)$ è valida

1.	$\exists x \exists y(M(x) \wedge N(y))$ ✓			premise
2.	$\neg \exists x(M(x) \wedge \exists y N(y))$ ✓			premise
3.	$\exists y(M(a) \wedge N(y))$ ✓			1 $\exists$
4.	$\forall x \neg(M(x) \wedge \exists y N(y))$			2 $\neg\exists$
5.	$M(a) \wedge N(b)$ ✓			3 $\exists$
6.	$M(a)$			5 $\wedge$
7.	$N(b)$			5 $\wedge$
8.	$\neg(M(a) \wedge \exists y N(y))$ ✓			4 $\forall$
9.	$\neg M(a)$	$\neg \exists y N(y)$ ✓		8 $\neg\wedge$
10.	×	$\forall y \neg N(y)$		9 $\neg\exists$
11.		$\neg(M(b) \wedge \exists y N(y))$ ✓		4 $\forall$
12.		$\neg M(b)$	$\neg \exists y N(y)$ ✓	11 $\neg\wedge$
13.		$\vert$	$\forall y \neg N(y)$	12 $\neg\exists$
14.		$\neg N(a)$	$\neg N(a)$	10 $\forall$
15.		$\neg N(b)$	$\neg N(b)$	10 $\forall$
		×	×	

Capitolo 6

Calcolo del prim'ordine

Esercizio 1

Dimostrare, se valide, le seguenti sequenze. Altrimenti fornirne un contromodello.

1. $\forall x Fx \vdash Fa \wedge (Fb \wedge (Fc \wedge Fd))$
2. $\forall x(Fx \vee Gx), \neg Fa \vdash Ga$
3. $\neg Fa \vdash \neg \forall x(Fx \wedge Gx)$
4. $\forall x(Fx \leftrightarrow R), R \vdash Fa$
5. $\forall x(\neg Fx \vee \neg Gx) \vdash \neg(Fa \wedge Ga)$
6. $\forall x(Fx \to Gx) \vdash \forall x(\neg Gx \to \neg Fx)$
7. $\forall x(Fx \to Gx) \vdash \forall x \neg Gx \to \forall x \neg Fx)$
8. $\forall x \forall y Fxy \vdash \forall x Fxx$
9. $\forall x Fx \vdash \forall x Gx \to \forall x(Fx \wedge Gx)$
10. $\forall x \forall y(Fxy \to \neg Fyx) \vdash \forall x \neg Fxx$
11. $\forall x Fx \vdash \exists x Fx$
12. $\neg \exists x Fx \vdash \neg Fa$
13. $\exists x \neg Fx \vdash \neg \forall x Fx$
14. $\forall x(Fx \to Gx) \vdash \exists x Fx \to \exists x Gx$
15. $\neg \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x(\neg Fx \vee \neg Gx)$
16. $\neg \forall x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(\neg Fx \vee \neg Gx)$

17. $\neg\exists x\exists yLxy \vdash \forall x\neg Lxx$

18. $\exists xFx \vdash \exists x\exists y(Fx \wedge Fy)$

19. $\forall x\neg Fx \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

20. $\forall x\neg Fx \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$

21. $\forall x\forall y\forall z((Lxy \wedge Lyz) \rightarrow \neg Lxz) \vdash \forall x\neg Lxx$

22. $Fa \leftrightarrow Gb \vdash \exists xGx \vee \neg\forall xFx$

23. $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \neg\exists xGx \rightarrow \forall x\neg Fx$

24. $\exists x\exists y(Fx \wedge Gy) \vdash \exists x(Fx \wedge \exists yGy)$

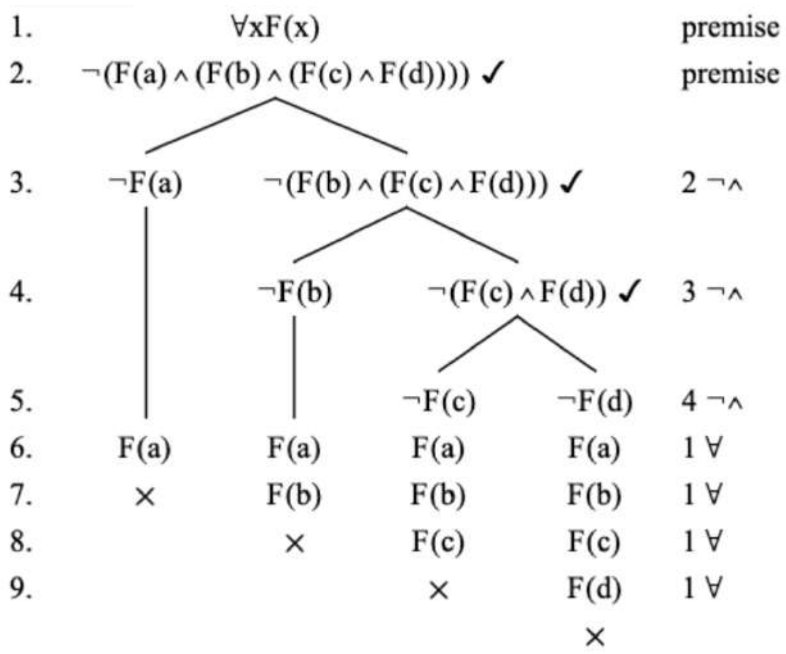
25. $\forall x(Fx \rightarrow \forall yGy) \vdash \forall x\forall y(Fx \rightarrow Gy)$

26. $\neg\forall x(Rxa \rightarrow Sxa) \vdash \exists x\exists y(Rxy \wedge \neg Sxy)$

27. $\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \neg Rac \vdash \neg Rab \vee \neg Rbc$

<u>Soluzione</u>:

1. $\forall xFx \vdash Fa \wedge (Fb \wedge (Fc \wedge Fd))$

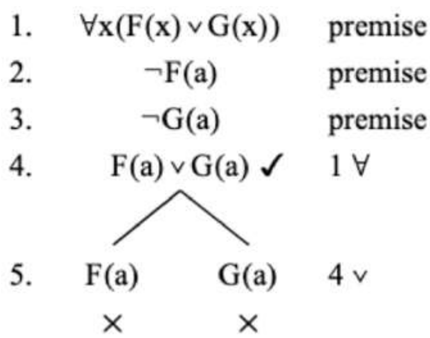


La sequenza è valida, quindi cerchiamo la prova.

Prova

1	(1)	$\forall x Fx$	A
1	(2)	Fa	1 EU
1	(3)	Fb	1 EU
1	(4)	Fc	1 EU
1	(5)	Fd	1 EU
1	(6)	$Fc \wedge Fd$	4, 5 I$\wedge$
1	(7)	$Fb \wedge (Fc \wedge Fd)$	3, 6 I$\wedge$
1	(8)	$Fa \wedge (Fb \wedge (Fc \wedge Fd))$	2, 7 I$\wedge$

2. $\forall x(Fx \vee Gx), \neg Fa \vdash Ga$



Prova

1	(1)	$\forall x(Fx \vee Gx)$	A
2	(2)	$\neg Fa$	A
1	(3)	$Fa \vee Ga$	1 EU
1,2	(4)	Ga	2, 3 MTP

4. $\forall x(Fx \leftrightarrow R), R \vdash Fa$

1.	$\forall x(F(x) \leftrightarrow R)$		premise
2.	R		premise
3.	$\neg F(a)$		premise
4.	$F(a) \leftrightarrow R$ ✓		$1\ \forall$
5.	$F(a)$	$\neg F(a)$	$4 \leftrightarrow$
6.	R	$\neg R$	$4 \leftrightarrow$
	×	×	

Prova

1	(1)	$\forall x(Fx \leftrightarrow R)$	A
2	(2)	R	A
1	(3)	$Fa \leftrightarrow R$	1 EU
1	(4)	$(Fa \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Fa)$	3 Def.$\leftrightarrow$
1	(5)	$R \rightarrow Fa$	4 E$\wedge$
1	(6)	Fa	2, 5 MPP

6. $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$

1.	$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$		premise
2.	$\neg\forall x(\neg G(x) \rightarrow \neg F(x))$ ✓		premise
3.	$\exists x\neg(\neg G(x) \rightarrow \neg F(x))$ ✓		$2\ \neg\forall$
4.	$\neg(\neg G(a) \rightarrow \neg F(a))$ ✓		$3\ \exists$
5.	$\neg G(a)$		$4\ \neg\rightarrow$
6.	$\neg\neg F(a)$ ✓		$4\ \neg\rightarrow$
7.	$F(a)$		$6\ \neg\neg$
8.	$F(a) \rightarrow G(a)$ ✓		$1\ \forall$
9.	$\neg F(a)$	$G(a)$	$8 \rightarrow$
	×	×	

Prova

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
1	(2)	$Fa \rightarrow Ga$	1 EU
3	(3)	$\neg Ga$	A
1,3	(4)	$\neg Fa$	2, 3 MTT
1	(5)	$\neg Ga \rightarrow \neg Fa$	3, 4 PC
1	(6)	$\forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$	5 IU

8. $\forall x \forall y Fxy \vdash \forall x Fxx$

1.	$\forall x \forall y F(x, y)$	premise
2.	$\neg \forall x F(x, x)$ ✓	premise
3.	$\exists x \neg F(x, x)$ ✓	$2\ \neg\forall$
4.	$\neg F(a, a)$	$3\ \exists$
5.	$\forall y F(a, y)$	$1\ \forall$
6.	$F(a, a)$	$5\ \forall$
	×	

Prova

1	(1)	$\forall x \forall y Fxy$	A
1	(2)	$\forall x Fxa$	1 EU
1	(3)	$\forall x Fxx$	2 IU

10. $\forall x \forall y(Fxy \rightarrow \neg Fyx) \vdash \forall x \neg Fxx$

1.	$\forall x \forall y(F(x, y) \rightarrow \neg F(y, x))$		premise
2.	$\neg \forall x \neg F(x, x)$ ✓		premise
3.	$\exists x \neg\neg F(x, x)$ ✓		$2\ \neg\forall$
4.	$\neg\neg F(a, a)$ ✓		$3\ \exists$
5.	$F(a, a)$		$4\ \neg\neg$
6.	$\forall y(F(a, y) \rightarrow \neg F(y, a))$		$1\ \forall$
7.	$F(a, a) \rightarrow \neg F(a, a)$ ✓		$6\ \forall$
8.	$\neg F(a, a)$	$\neg F(a, a)$	$7 \rightarrow$
	×	×	

Prova

1	(1)	$\forall x \forall y(Fxy \rightarrow \neg Fyx)$	A
1	(2)	$\forall x(Fxa \rightarrow \neg Fax)$	1 EU
1	(3)	$Faa \rightarrow \neg Faa$	2 EU
4	(4)	$\neg \forall x \neg Fxx$	A
4	(5)	$\neg\neg Faa$	4 EU
4	(6)	Faa	5 DN
1,4	(7)	$\neg Faa$	3, 6 MPP
1,4	(8)	$Faa \wedge \neg Faa$	6, 7 I$\wedge$
1	(9)	$\neg\neg \forall x \neg Fxx$	4, 8 RAA
1	(10)	$\forall x \neg Fxx$	9 DN

11. $\forall xFx \vdash \exists xFx$

1.	$\forall x F(x)$	premise
2.	$\neg\exists x F(x)$ ✓	premise
3.	$\forall x \neg F(x)$	2 $\neg\exists$
4.	$F(a)$	1 $\forall$
5.	$\neg F(a)$	3 $\forall$
	×	

Prova

1	(1)	$\forall xFx$	A
1	(2)	Fa	1 EU
1	(3)	$\exists xFx$	2 IE

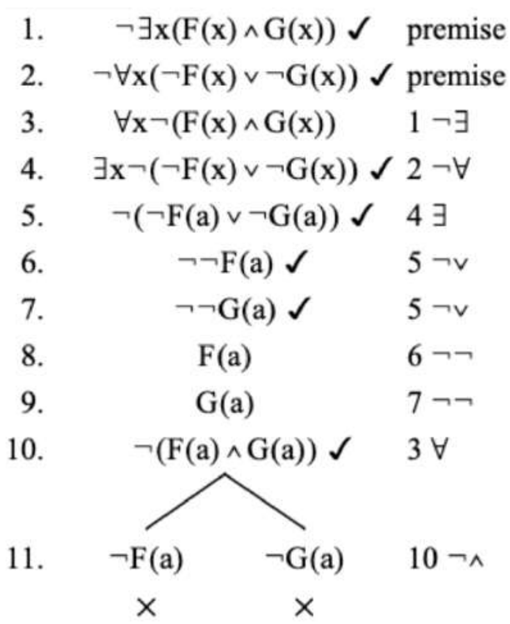
13. $\exists x\neg Fx \vdash \neg\forall xFx$

1.	$\exists x \neg F(x)$ ✓	premise
2.	$\neg\neg\forall x F(x)$ ✓	premise
3.	$\neg F(a)$	1 $\exists$
4.	$\forall x F(x)$	2 $\neg\neg$
5.	$F(a)$	4 $\forall$
	×	

Prova

1	(1)	$\exists x\neg Fx$	A
2	(2)	$\neg Fa$	A
3	(3)	$\forall xFx$	A
3	(4)	Fa	3 EU
2, 3	(5)	$Fa \wedge \neg Fa$	2, 4 I$\wedge$
2	(6)	$\neg\forall xFx$	3, 5 RAA
1	(7)	$\neg\forall xFx$	1, 2, 6 EE

15. $\neg\exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x(\neg Fx \vee \neg Gx)$



Prova

1	(1)	$\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$	A
2	(2)	$\neg\forall x(\neg Fx \vee \neg Gx)$	A
2	(3)	$\neg(\neg Fa \vee \neg Ga)$	2 EU
2	(4)	$\neg\neg(Fa \wedge Ga)$	3 IE De Morgan
2	(5)	$Fa \wedge Ga$	4 DN
2	(6)	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	5 IE
1,2	(7)	$\exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \neg\exists x(Fx \wedge Gx)$	1, 6 I$\wedge$
1	(8)	$\neg\neg\forall x(\neg Fx \vee \neg Gx)$	2, 7 RAA
1	(9)	$\forall x(\neg Fx \vee \neg Gx)$	8 DN

18. $\exists xFx \vdash \exists x \exists y(Fx \wedge Fy)$

1.	$\exists x F(x)$ ✓		premise
2.	$\neg\exists x\exists y(F(x) \wedge F(y))$ ✓		premise
3.	$F(a)$		$1\ \exists$
4.	$\forall x \neg\exists y(F(x) \wedge F(y))$		$2\ \neg\exists$
5.	$\neg\exists y(F(a) \wedge F(y))$ ✓		$4\ \forall$
6.	$\forall y \neg(F(a) \wedge F(y))$		$5\ \neg\exists$
7.	$\neg(F(a) \wedge F(a))$ ✓		$6\ \forall$
8.	$\neg F(a)$	$\neg F(a)$	$7\ \neg\wedge$
	×	×	

Prova

1	(1)	$\exists xFx$	A
2	(2)	Fa	A
2	(3)	$Fa \wedge Fa$	2, 2 I∧
2	(4)	$\exists x(Fx \wedge Fa)$	3 IE
2	(5)	$\exists x \exists y(Fx \wedge Fy)$	4 IE
1	(6)	$\exists x \exists y(Fx \wedge Fy)$	1, 2, 5 EE

23. $\forall x(Fx \to Gx) \vdash \neg\exists xGx \to \forall x\neg Fx$

1.	$\forall x(F(x) \to G(x))$		premise
2.	$\neg(\neg\exists xG(x) \to \forall x\neg F(x))$ ✓		premise
3.	$\neg\exists xG(x)$ ✓		2 $\neg\to$
4.	$\neg\forall x\neg F(x)$ ✓		2 $\neg\to$
5.	$\forall x\neg G(x)$		3 $\neg\exists$
6.	$\exists x\neg\neg F(x)$ ✓		4 $\neg\forall$
7.	$\neg\neg F(a)$ ✓		6 $\exists$
8.	$F(a)$		7 $\neg\neg$
9.	$F(a) \to G(a)$ ✓		1 $\forall$
10.	$\neg F(a)$	$G(a)$	9 $\to$
11.	×	$\neg G(a)$	5 $\forall$
		×	

Prova

1	(1)	$\forall x(Fx \to Gx)$	A
2	(2)	$\neg\exists xGx$	A
2	(3)	$\forall x\neg Gx$	2 IS(S) $\forall x\neg Fx \dashv\vdash \neg\exists xFx$
1	(4)	$Fa \to Ga$	1 EU
2	(5)	$\neg Ga$	3 EU
1,2	(6)	$\neg Fa$	4, 5 MTT
1,2	(7)	$\forall x\neg Fx$	6 IU
1	(8)	$\neg\exists xGx \to \forall x\neg Fx$	2, 7 PC

24. $\exists x \exists y(Fx \wedge Gy) \vdash \exists x(Fx \wedge \exists y Gy)$

1.	$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y))$ ✓			premise
2.	$\neg \exists x(F(x) \wedge \exists y G(y))$ ✓			premise
3.	$\exists y(F(a) \wedge G(y))$ ✓			$1\ \exists$
4.	$\forall x \neg(F(x) \wedge \exists y G(y))$			$2\ \neg\exists$
5.	$F(a) \wedge G(b)$ ✓			$3\ \exists$
6.	$F(a)$			$5\ \wedge$
7.	$G(b)$			$5\ \wedge$
8.	$\neg(F(a) \wedge \exists y G(y))$ ✓			$4\ \forall$
9.	$\neg F(a)$	$\neg \exists y G(y)$ ✓		$8\ \neg\wedge$
10.	$\times$	$\forall y \neg G(y)$		$9\ \neg\exists$
11.		$\neg(F(b) \wedge \exists y G(y))$ ✓		$4\ \forall$
12.		$\neg F(b)$	$\neg \exists y G(y)$ ✓	$11\ \neg\wedge$
13.		|	$\forall y \neg G(y)$	$12\ \neg\exists$
14.		$\neg G(a)$	$\neg G(a)$	$10\ \forall$
15.		$\neg G(b)$	$\neg G(b)$	$10\ \forall$
		$\times$	$\times$	

Prova

1	(1)	$\exists x \exists y(Fx \wedge Gy)$	A
2	(2)	$Fa \wedge Gb$	A
2	(3)	$\exists x(Fx \wedge Gb)$	2 IE
2	(4)	$\exists x(Fx \wedge \exists y Gy)$	3 IE
1	(5)	$\exists x(Fx \wedge \exists y Gy)$	1, 2, 4 EE

27. $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \neg Rac \vdash \neg Rab \vee \neg Rbc$

Prova

1	(1)	$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$	A
2	(2)	$\neg Rac$	A
1	(3)	$Rab \wedge Rbc \rightarrow Rac$	1 EU
1,2	(4)	$\neg(Rab \wedge Rbc)$	2, 3 MTT
1,2	(5)	$\neg Rab \vee \neg Rbc$	4 De Morgan

Esercizio 2

Dimostrare, se valide, queste sequenze. Se invalide, fornire un contromodello:

1. $\forall x(Gx \rightarrow Hx \wedge Jx), \forall x(Fx \vee \neg Jx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Hx)$
2. $\forall xFx \vdash \neg \exists xGx \leftrightarrow \neg(\exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \forall y(Gy \rightarrow Fy))$
3. $\exists xFx \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Hy), \exists xJx \rightarrow \exists xGx \vdash \exists x(Fx \wedge Jx) \rightarrow \exists zHz$
4. $\exists xPax \vdash \exists x(Pax \wedge \exists yPxy))$
5. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow \neg Hx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$
6. $\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$
7. $Fm, \forall x(Fx \rightarrow Ax) \vdash Am$
8. $\neg Fn, \forall x(Ax \rightarrow Fx) \vdash \neg An$
9. $\exists x(Gx \wedge \neg Fx), \forall x(Gx \rightarrow Hx) \vdash \exists x(Hx \wedge \neg Fx)$
10. $\exists x(Gx \wedge Fx), \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx) \vdash \exists x \neg Hx$
11. $\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(\neg Fx \rightarrow \neg Hx) \vdash \forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$
12. $\forall x(Cx \rightarrow Lx), \forall x(Lx \rightarrow S(x,b)) \vdash \exists xCx$
13. $\forall x \exists y Sc(x,y) \vdash \exists x \forall y Sc(x,y)$

14. $\exists x(Tx \land Px), \forall x(Px \to S(x,b)) \vdash \exists x S(x,b)$

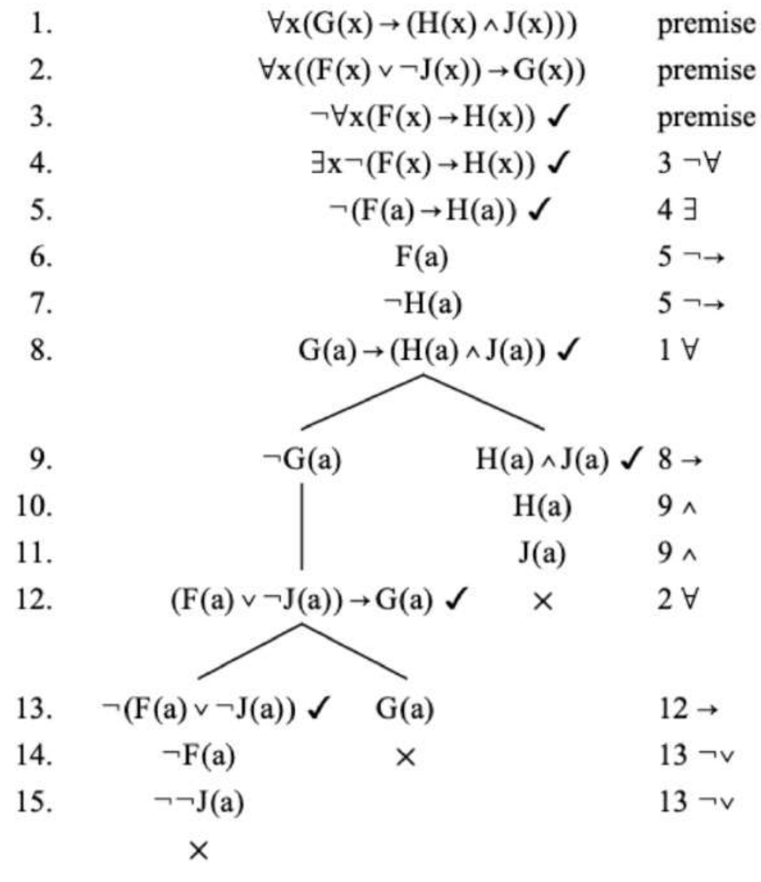
15. $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \vdash \forall x Fx \leftrightarrow \forall x Gx$

16. $\exists x Fx \lor \exists x Gx, \forall x(Fx \to Gx) \vdash \exists x Gx$

17. $\forall x(Dx \to Fx) \vdash \forall z(Dz \to (\forall y(Fy \to Gy) \to Gz))$

Soluzione:

1. $\forall x(Gx \to Hx \land Jx), \forall x(Fx \lor \neg Jx \to Gx) \vdash \forall x(Fx \to Hx)$

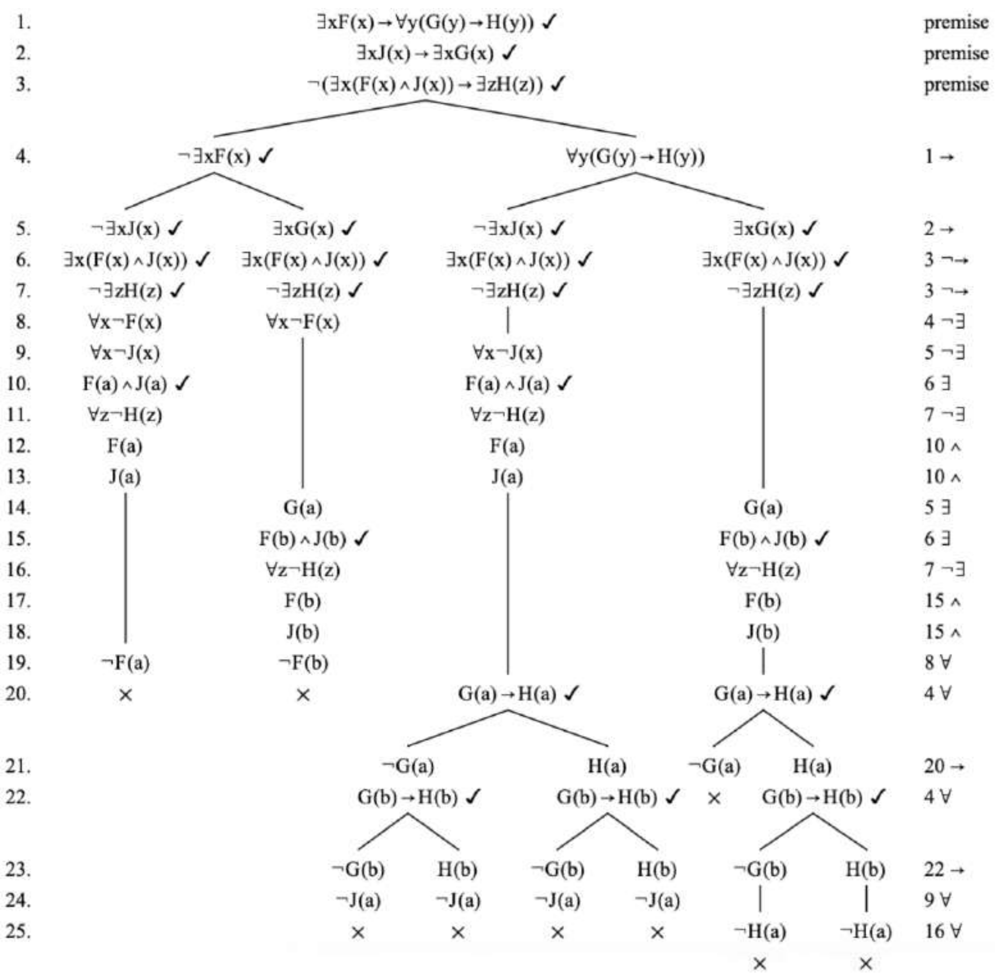


Prova

1	(1)	$\forall x(Gx \to Hx \land Jx)$	A
2	(2)	$\forall x(Fx \lor \neg Jx \to Gx)$	A
1	(3)	$Ga \to Ha \land Ja$	1 EU

2	(4)	$Fa \vee \neg Ja \rightarrow Ga$	2 EU
5	(5)	Fa	A
5	(6)	$Fa \vee \neg Ja$	5 I$\vee$
2, 5	(7)	Ga	4, 6 MPP
1, 2, 5	(8)	$Ha \wedge Ja$	3, 7 MPP
1, 2, 5	(9)	Ha	8 E$\wedge$
1, 2	(10)	$Fa \rightarrow Ha$	5, 9 PC
1, 2	(11)	$\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	10 IU

3. $\exists xFx \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Hy), \exists xJx \rightarrow \exists xGx \vdash \exists x(Fx \wedge Jx) \rightarrow \exists zHz$



Prova

1	(1)	$\exists xFx \to \forall y(Gy \to Hy)$	A
2	(2)	$\exists xJx \to \exists xGx$	A
3	(3)	$\exists x(Fx \land Jx)$	A
3	(4)	$\exists xFx \land \exists xJx$	3 IS
3	(5)	$\exists xFx$	4 E$\land$
3	(6)	$\exists xJx$	4 E$\land$
1,3	(7)	$\forall y(Gy \to Hy)$	1, 5 MPP
2,3	(8)	$\exists xGx$	2, 6 MPP
1,3	(9)	$Ga \to Ha$	7 EU
10	(10)	Ga	A
1,3,10	(11)	Ha	9, 10 MPP
1,3,10	(12)	$\exists zHz$	11 IE
1,2,3	(13)	$\exists zHz$	8, 10, 12 EE
1,2	(14)	$\exists x(Fx \land Jx) \to \exists zHz$	3, 13 PC

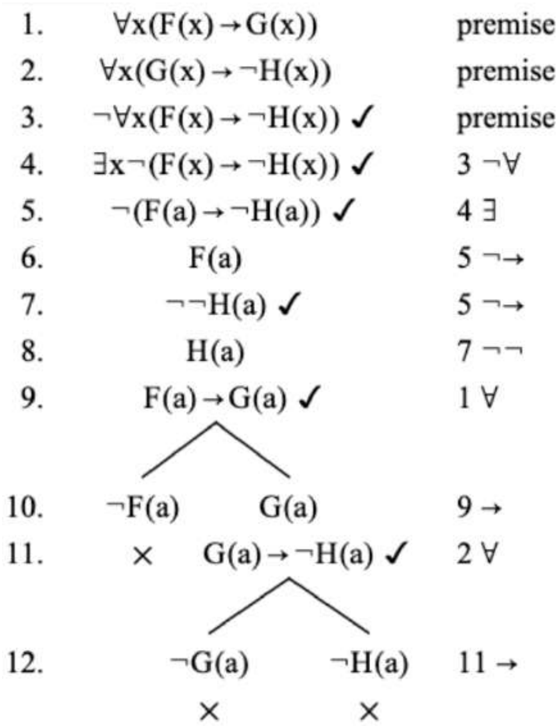
4. $\exists xPax \vdash \exists x(Pax \wedge \exists yPxy))$

1.	$\exists xP(a, x)$ ✓				premise
2.	$\neg\exists x(P(a, x) \wedge \exists yP(x, y))$ ✓				premise
3.	$P(a, b)$				1 $\exists$
4.	$\forall x\neg(P(a, x) \wedge \exists yP(x, y))$				2 $\neg\exists$
5.	$\neg(P(a, a) \wedge \exists yP(a, y))$ ✓				4 $\forall$
6.	$\neg P(a, a)$		$\neg\exists yP(a, y)$ ✓		5 $\neg\wedge$
7.			$\forall y\neg P(a, y)$		6 $\neg\exists$
8.	$\neg(P(a, b) \wedge \exists yP(b, y))$ ✓		$\neg(P(a, b) \wedge \exists yP(b, y))$ ✓		4 $\forall$
9.	$\neg P(a, b)$	$\neg\exists yP(b, y)$ ✓	$\neg P(a, b)$	$\neg\exists yP(b, y)$ ✓	8 $\neg\wedge$
10.	×	$\forall y\neg P(b, y)$	×	$\forall y\neg P(b, y)$	9 $\neg\exists$
11.		$\neg P(b, a)$			10 $\forall$
12.		$\neg P(b, b)$			10 $\forall$
13.				$\neg P(a, a)$	7 $\forall$
14.				$\neg P(a, b)$	7 $\forall$
				×	

La sequenza non è valida. Un contromodello è:

D = $\{a, b\}$
π(P) = $\{(a, b)\}$

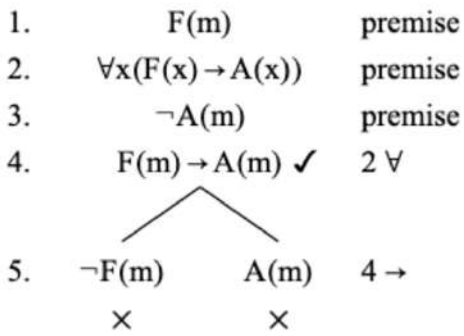
5. $\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Gx \to \neg Hx) \vdash \forall x(Fx \to \neg Hx)$



Prova

1	(1)	$\forall x(Fx \to Gx)$	A
2	(2)	$\forall x(Gx \to \neg Hx)$	A
3	(3)	Fa	A
1	(4)	$Fa \to Ga$	1 EU
2	(5)	$Ga \to \neg Ha$	2 EU
1,3	(6)	Ga	3, 4 MPP
1,2,3	(7)	$\neg Ha$	5, 6 MPP
1,2	(8)	$Fa \to \neg Ha$	3, 7 PC
1,2	(9)	$\forall x(Fx \to \neg Hx)$	8 IU

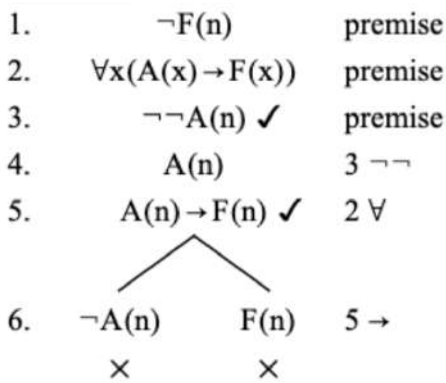
7. $Fm, \forall x(Fx \rightarrow Ax) \vdash Am$



Prova

1	(1)	Fm	A
2	(2)	$\forall x(Fx \rightarrow Ax)$	A
2	(3)	$Fm \rightarrow Am$	2 EU
1,2	(4)	Am	1, 3 MPP

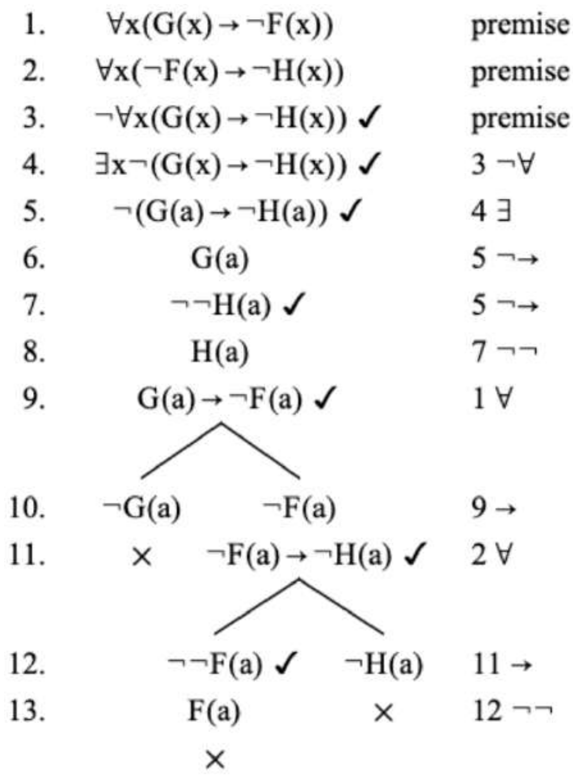
8. $\neg Fn, \forall x(Ax \rightarrow Fx) \vdash \neg An$



Prova

1	(1)	$\neg Fn$	A
2	(2)	$\forall x(Ax \rightarrow Fx)$	A
2	(3)	$An \rightarrow Fn$	2 EU
1, 2	(4)	$\neg An$	1, 3 MTT

11. $\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(\neg Fx \rightarrow \neg Hx) \vdash \forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$

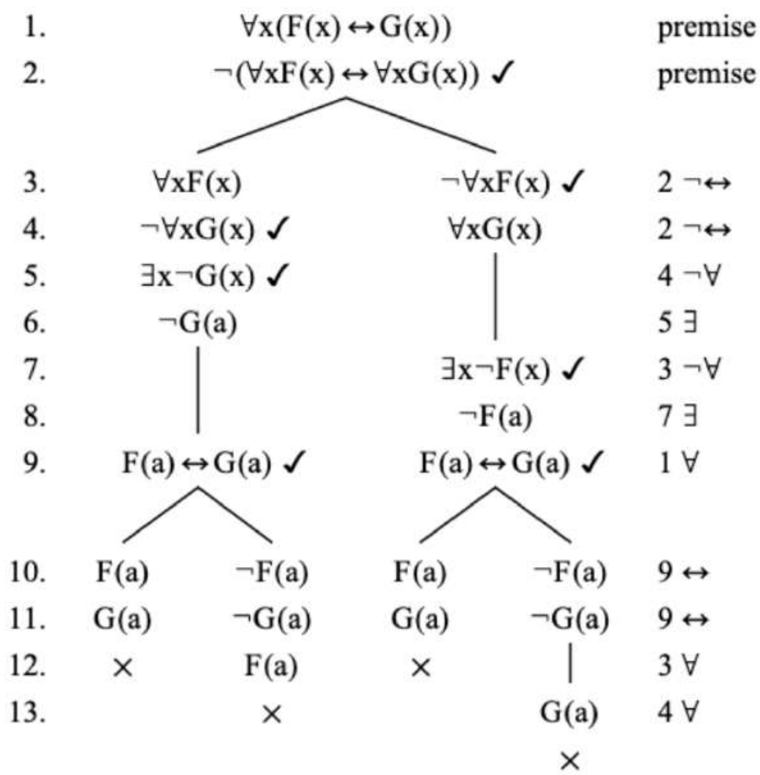


Prova

1	(1)	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx)$	A
2	(2)	$\forall x(\neg Fx \rightarrow \neg Hx)$	A
3	(3)	Ga	A
1	(4)	$Ga \rightarrow \neg Fa$	1 EU

2	(5)	$\neg Fa \rightarrow \neg Ha$	2 EU
1, 3	(6)	$\neg Fa$	3, 4 MPP
1, 2, 3	(7)	$\neg Ha$	5, 6 MPP
1, 2	(8)	$Ga \rightarrow \neg Ha$	3, 7 PC
1, 2	(9)	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$	8 IU

15. $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \vdash \forall xFx \leftrightarrow \forall xGx$



Prova

1	(1)	$\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$	A
2	(2)	$\forall xFx$	A
1	(3)	$Fa \leftrightarrow Ga$	1 EU
2	(4)	Fa	2 EU
1	(5)	$(Fa \rightarrow Ga) \wedge (Ga \rightarrow Fa)$	3 Def↔

1	(6)	$Fa \to Ga$	5 E$\land$
1, 2	(7)	Ga	4, 6 MPP
1, 2	(8)	$\forall xGx$	7 IU
1	(9)	$\forall xFx \to \forall xGx$	2, 8 PC
10	(10)	$\forall xGx$	A
10	(11)	Ga	10 EU
1	(12)	$Ga \to Fa$	5 E$\land$
10, 1	(13)	Fa	11, 12 MPP
10, 1	(14)	$\forall xFx$	13 IU
1	(15)	$\forall xGx \to \forall xFx$	1, 10 PC
1	(16)	$(\forall xFx \to \forall xGx) \land (\forall xGx \to \forall xFx)$	9, 15 I$\land$
1	(17)	$\forall xFx \leftrightarrow \forall xGx$	16 Def$\leftrightarrow$

Esercizio 3

Dimostrate, se lo sono, i seguenti teoremi. Altrimenti fornite un contromodello utilizzando gli alberi:

1. $\vdash \neg\exists x(Fx \land \neg Fx)$
2. $\vdash \exists xFx \lor \exists x\neg Fx$
3. $\vdash \exists xFx \lor \forall x\neg Fx$
4. $\vdash \neg\exists x\forall y(Lxy \leftrightarrow \neg Lyy)$
5. $\vdash \forall x(Fx \to Gx) \to (\exists xFx \to \exists xGx)$
6. $\vdash \exists x(Fx \lor Gx) \leftrightarrow \exists xFx \lor \exists xGx$
7. $\vdash \forall x(Fx \land Gx) \leftrightarrow \forall xFx \land \forall xGx$
8. $\vdash \exists x(Fx \land Gx) \to \exists xFx \land \exists xGx$
9. $\vdash \forall xFx \lor \forall xGx \to \forall x(Fx \lor Gx)$

10. $\vdash \forall x(Px \to Qx) \leftrightarrow \forall x(Px \to \neg\neg Qx)$

11. $\vdash (\exists x(Qx \land \neg Rx) \land \forall x(Qx \to Px)) \to \exists x(Px \land \neg Rx)$

12. $\vdash (\forall x(Qx \to \neg Rx) \land \forall x(Px \to Qx)) \to \forall x(Px \to \neg Rx)$

13. $\vdash \forall x((\neg Px) \to Qx) \to \forall y((\neg Qy) \to Py)$

14. $\vdash \forall x \exists y(Ay \to Ax)$

15. $\vdash (\forall x \forall y Axy \land \forall x(Axx \to Bi)) \to Bi$

16. $\vdash Fa \to (Ga \to \exists x(Fx \land Gx))$

17. $\vdash \forall x(Fx \to Gx) \to (\neg Fa \lor Ga)$

18. $\vdash \forall x(Fx \to \exists y(Gy \land \neg Gy)) \to \neg\exists x Fx$

19. $\vdash \forall x \forall y Rxy \to \forall y \forall x Ryx$

20. $\vdash \exists x \exists y Rxy \to \exists y \exists x Ryx$

21. $\vdash \forall x(Fx \to \forall y Gy) \to \forall x \forall y(Fx \to Gy)$

22. $\vdash \neg\exists x(Fx \land Gx) \to (\forall x Fx \to \neg\exists y Gy)$

Soluzione:

1. $\vdash \neg\exists x(Fx \land \neg Fx)$

Prova

(1)	$\neg(Fa \land \neg Fa)$	IT
(2)	$\forall x \neg(Fx \land \neg Fx)$	1 IU
(3)	$\neg\exists x(Fx \land \neg Fx)$	IE (Scambio di Quantificatori - SQ)

Si faccia attenzione a non confondere la regola di Introduzione di Equivalenza con quella di Introduzione dell'Esistenziale, entrambe indicate con IE.

2. $\vdash \exists xFx \lor \exists x\neg Fx$

Prova

(1)	$Fa \lor \neg Fa$	IT
(2)	$\exists x(Fx \lor \neg Fx)$	1 IE
(3)	$\exists xFx \lor \exists x\neg Fx$	2 IS(S) $\exists x(Fx \lor Gx) \vdash \exists xFx \lor \exists xGx$

3. $\vdash \exists xFx \lor \forall x\neg Fx$

Prova

1	(1)	$\neg(\exists xFx \lor \forall x\neg Fx)$	A
1	(2)	$\neg\exists xFx \land \neg\forall x\neg Fx$	1 De Morgan
1	(3)	$\neg\exists xFx$	2 E$\land$
1	(4)	$\neg\forall x\neg Fx$	2 E$\land$
1	(5)	$\exists xFx$	4 IE (SQ)
1	(6)	$\exists xFx \land \neg\exists xFx$	3, 5 I$\land$
	(7)	$\neg\neg(\exists xFx \lor \forall x\neg Fx)$	1, 6 RAA
	(8)	$\exists xFx \lor \forall x\neg Fx$	7 DN

4. $\vdash \neg\exists x\forall y(Lxy \leftrightarrow \neg Lyy)$

Prova

1	(1)	$\exists x\forall y(Lxy \leftrightarrow \neg Lyy)$	A
2	(2)	$\forall y(Lay \leftrightarrow \neg Lyy)$	A
2	(3)	$Laa \leftrightarrow \neg Laa$	2 E$\forall$
2	(4)	$Laa \to \neg Laa$	3 Def. $\leftrightarrow$

2	(5)	$\neg Laa \to Laa$	3 Def. $\leftrightarrow$
2	(6)	$\neg Laa \lor \neg Laa$	4 IE (IM)
2	(7)	$\neg Laa$	6 IE (TAUT)
2	(8)	Laa	5, 7 MPP
2	(9)	$Laa \land \neg Laa$	7, 8 I$\land$
1	(10)	$Laa \land \neg Laa$	1, 2, 9 EE
	(11)	$\neg \exists x \forall y (Lxy \leftrightarrow \neg Lyy)$	1, 10 RAA

8. $\vdash \exists x(Fx \land Gx) \to \exists xFx \land \exists xGx$

Prova

1	(1)	$\exists x(Fx \land Gx)$	A
2	(2)	$Fa \land Ga$	A
2	(3)	Fa	2 E$\land$
2	(4)	Ga	2 E$\land$
2	(5)	$\exists xFx$	3 IE
2	(6)	$\exists xGx$	4 IE
2	(7)	$\exists xFx \land \exists xGx$	5, 6 I$\land$
1	(8)	$\exists xFx \land \exists xGx$	1, 2, 7 EE
	(9)	$\exists x(Fx \land Gx) \to \exists xFx \land \exists xGx$	1, 8 PC

9. $\vdash \forall xFx \lor \forall xGx \to \forall x(Fx \lor Gx)$

Prova

1	(1)	$\forall xFx \lor \forall xGx$	A
2	(2)	$\forall xFx$	A
2	(3)	Fa	2 EU

2	(4)	$Fa \lor Ga$	3 I$\lor$
2	(5)	$\forall x(Fx \lor Gx)$	4 IU
6	(6)	$\forall xGx$	A
6	(7)	Ga	6 EU
6	(8)	$Fa \lor Ga$	7 I$\lor$
6	(9)	$\forall x(Fx \lor Gx)$	8 IU
1	(10)	$\forall x(Fx \lor Gx)$	1, 2, 5, 6, 9 E$\lor$
	(11)	$\forall xFx \lor \forall xGx \to \forall x(Fx \lor Gx)$	1, 10 PC

13. $\vdash \forall x(\neg Px \to Qx) \to \forall y(\neg Qy \to Py)$

Prova

1	(1)	$\forall x(\neg Px \to Qx)$	A
1	(2)	$\neg Pa \to Qa$	1 EU
2	(3)	$\neg Qa$	A
1, 2	(4)	$\neg\neg Pa$	2, 3 MTT
1, 2	(5)	Pa	4 DN
1	(6)	$\neg Qa \to Pa$	3, 5 PC
1	(7)	$\forall y(\neg Qy \to Py)$	6 IU
	(8)	$\forall x(\neg Px \to Qx) \to \forall y(\neg Qy \to Py)$	1, 7 PC

15. $\vdash (\forall x\forall yAxy \land \forall x(Axx \to Bi)) \to Bi$

Prova

1	(1)	$\forall x\forall yAxy \land \forall x(Axx \to Bi)$	A
1	(2)	$\forall x\forall yAxy$	1 E$\land$
1	(3)	$\forall x(Axx \to Bi)$	1 E$\land$

1	(4)	$\forall y(Aay)$	2 EU
1	(5)	Aaa	4 EU
1	(6)	$Aaa \to Bi$	3 EU
1	(7)	Bi	5, 6 MPP
	(8)	$(\forall x \forall y Axy \wedge \forall x(Axx \to Bi)) \to Bi$	1, 7 PC

16. $\vdash Fa \to (Ga \to \exists x(Fx \wedge Gx))$

Prova

1	(1)	Fa	A
2	(2)	Ga	A
1, 2	(3)	$Fa \wedge Ga$	1, 2 I$\wedge$
1, 2	(4)	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	3 IE
1	(5)	$Ga \to \exists x(Fx \wedge Gx)$	2, 4 PC
	(6)	$Fa \to (Ga \to \exists x(Fx \wedge Gx))$	1, 5 PC

17. $\vdash \forall x(Fx \to Gx) \to (\neg Fa \vee Ga)$

Prova

1	(1)	$\forall x(Fx \to Gx)$	A
1	(2)	$Fa \to Ga$	1 EU
	(3)	$Fa \vee \neg Fa$	IT
4	(4)	Fa	A
1, 4	(5)	Ga	2, 4 MPP
1, 4	(6)	$\neg Fa \vee Ga$	5 I$\vee$
7	(7)	$\neg Fa$	A
7	(8)	$\neg Fa \vee Ga$	7 I$\vee$
1	(9)	$\neg Fa \vee Ga$	3, 4, 6, 7, 8 E$\vee$
	(10)	$\forall x(Fx \to Gx) \to (\neg Fa \vee Ga)$	1, 9 PC

20. $\vdash \exists x \exists y Rxy \rightarrow \exists y \exists x Ryx$

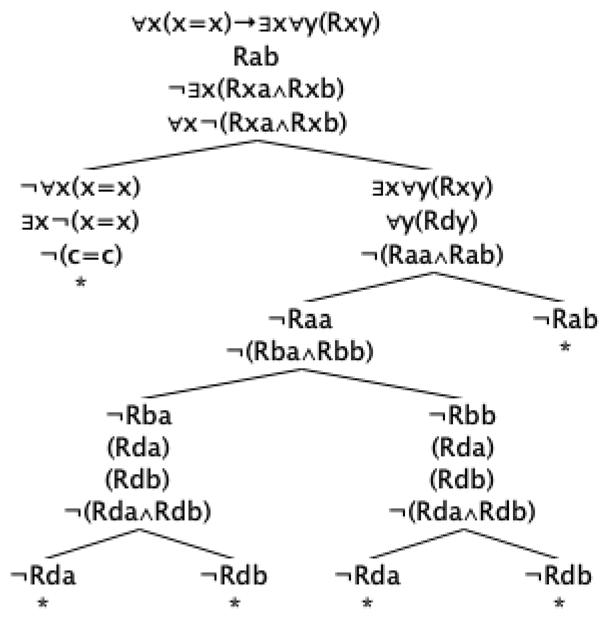
Prova

1	(1)	$\exists x \exists y Rxy$	A
2	(2)	Rab	A
2	(3)	$\exists y Ryb$	2 IE
2	(4)	$\exists y \exists x Ryx$	3 IE
1	(5)	$\exists y \exists x Ryx$	1, 2, 4 EE
	(6)	$\exists x \exists y Rxy \rightarrow \exists y \exists x Ryx$	1, 5 PC

Esercizio 4

Dimostrate, utilizzando gli alberi di refutazione, la validità o meno delle sequenze che seguono. Se lo sono datene una dimostrazione in deduzione naturale.

1. $\forall x(x = x) \rightarrow \exists x \forall y Rxy, Rab \vdash \exists x(Rxa \wedge Rxb)$



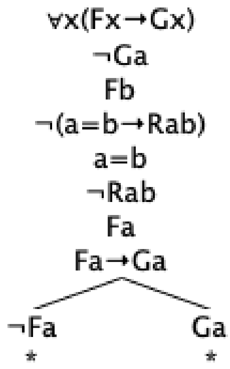
La sequenza è valida, quindi cerchiamo la prova.

Prova

1	(1)	$\forall x(x = x) \rightarrow \exists x \forall y Rxy$	A
2	(2)	Rab	A
	(3)	$a = a$	I=
	(4)	$\forall x(x = x)$	3 IU
1	(5)	$\exists x \forall y Rxy$	1, 4 MPP
6	(6)	$\forall y Rcy$	A
6	(7)	Rca	6 EU

6	(8)	Rcb	6 EU
6	(9)	$Rca \wedge Rcb$	7, 8 I$\wedge$
6	(10)	$\exists x(Rxa \wedge Rxb)$	9 IE
1	(11)	$\exists x(Rxa \wedge Rxb)$	5, 6, 10 EE

2. $\forall x(Fx \to Gx), \neg Ga, Fb \vdash a = b \to Rab$



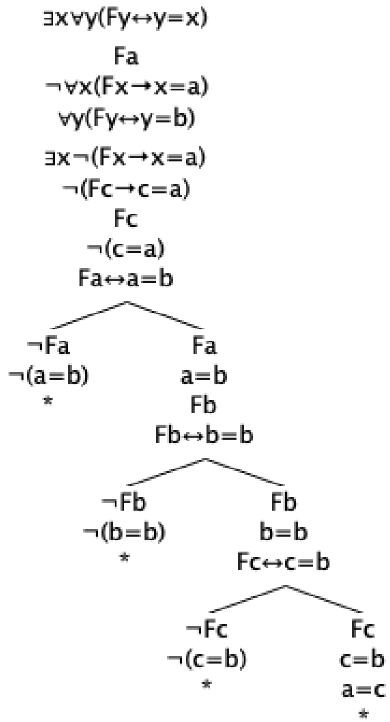
La sequenza è valida, quindi cerchiamo la prova.

Prova

1	(1)	$\forall x(Fx \to Gx)$	A
2	(2)	$\neg Ga$	A
3	(3)	Fb	A
4	(4)	$\neg(a = b \to Rab)$	A
4	(5)	$a = b \wedge \neg Rab$	IE(S) $\neg(P \to Q) \dashv\vdash P \wedge \neg Q$
4	(6)	$a = b$	5 E$\wedge$
3,4	(7)	Fa	3, 6 E=
1	(8)	$Fa \to Ga$	1 EU
1,3,4	(9)	Ga	7, 8 MPP

1,2,3,4	(10)	$Ga \wedge \neg Ga$	2, 9 I$\wedge$
1,2,3	(11)	$\neg\neg(a = b \rightarrow Rab)$	4, 10 RAA
1,2,3	(12)	$a = b \rightarrow Rab$	11 DN

3. $\exists x \forall y(Fy \leftrightarrow y = x), Fa \vdash \forall x(Fx \rightarrow x = a)$



La sequenza è valida, quindi cerchiamo la prova.

Prova

1	(1)	$\exists x \forall y(Fy \leftrightarrow y = x)$	A
2	(2)	Fa	A
3	(3)	$\forall y(Fy \leftrightarrow y = b)$	A
3	(4)	$Fa \leftrightarrow a = b$	3 EU

3	(5)	$(Fa \to a = b) \land (a = b \to Fa)$	4 Def.↔
3	(6)	$Fa \to a = b$	5 E∧
2,3	(7)	$a = b$	2, 6 MPP
3	(8)	$Fc \leftrightarrow c = b$	3 EU
2,3	(9)	$Fc \leftrightarrow c = a$	7, 8 E=
2,3	(10)	$\forall x(Fx \to x = a)$	9 IU
1,2	(11)	$\forall x(Fx \to x = a)$	1, 3, 10 EE

Bibliografia

[1] Allen, Colin e Michael Hand (2001). *Logic primer*. MIT Press.

[2] Beall, J. e David Ripley (2011). «Instructor Supplement for Logic: The Basics». Routledge. Disponibile online al seguente link:

https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.690.3599&rep=rep1&type=pdf

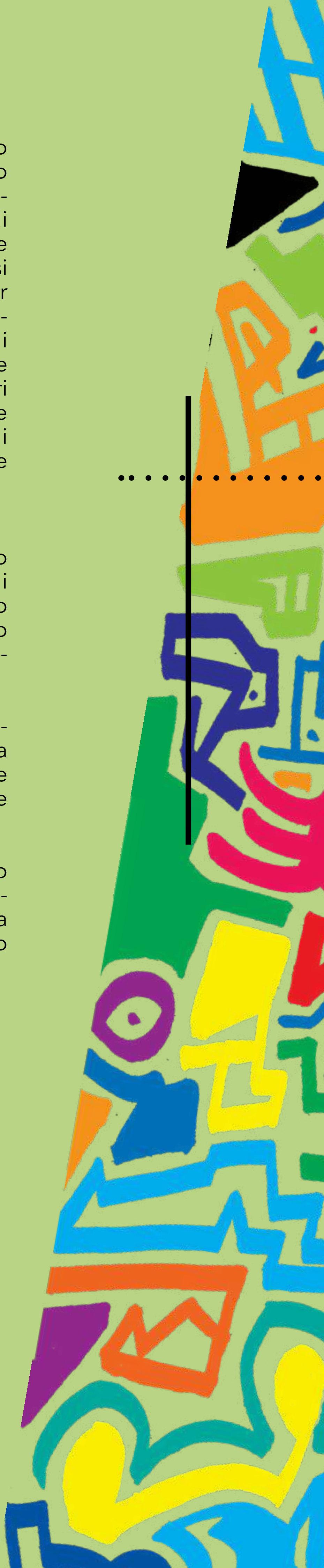
[3] Beall, Jc e Shay Allen Logan (2017). *Logic: The Basics*. Taylor & Francis.

[4] Lemmon, E. J. (1978). *Beginning logic*. Hackett Publishing. Versione italiana: *Elementi di logica* (2008). Laterza.

[5] Smullyan, Raymond M. (1978). *What is the name of this book? The riddle of Dracula and other logical puzzles*. Penguin Books. Versione italiana: *Qual è il titolo di questo libro?* (1981). Zanichelli.

[6] Varzi, A., J. Nolt e D. Rohatyn (2011). *Schaum's Outline of Logic* (Second Edition). McGraw-Hill Education. Versione italiana: *Logica* (2007). McGraw-Hill Education.

Intervistati sul valore di questo testo, gli autori hanno dichiarato: «o questa affermazione è falsa, oppure questo è il miglior eserciziario di logica che sia mai stato scritto». Se la loro affermazione vi risulta poco comprensibile, ma avete intenzione di capirci qualcosa di più, questo eserciziario può fare al caso vostro! È uno strumento che integra ed estende un comune manuale di logica – ma che non si sostituisce ad esso, mancando la parte teorica –, ed è pensato per coloro che hanno intrapreso lo studio della logica per la prima volta e desiderano farne pratica. Il testo si rivolge principalmente agli studenti universitari che seguono un corso base di logica, ma anche a chi sta tentando di barcamenarsi con questa disciplina al di fuori dell'ambiente accademico. Se sarete disposti a mettervi in gioco e a spremervi un po' le meningi, scoprirete che o l'affermazione degli autori è falsa o questo è davvero il miglior eserciziario di logica che sia mai stato scritto!



Massimiliano Carrara è professore di logica presso il Dipartimento FISPPA dell'Università di Padova. È attualmente *visiting professor* di logica all'Istituto di Filosofia della Facoltà di Teologia di Lugano e *teaching fellow* (professore a contratto) di Critical Thinking presso l'Università Bocconi di Milano. Si occupa di filosofia della logica, logica e metafisica.

Filippo Mancini è un dottorando in filosofia dell'Università di Padova. Laureato in astrofisica presso l'Università di Bologna e in filosofia presso l'Università di Padova, si occupa di logica e metafisica. Le sue ricerche si focalizzano sulle logiche non-classiche, sul dialeteismo e sulle filosofie orientali.

Andrea Strollo è Professore Associato all'Università di Nanchino (Cina), dove insegna logica e filosofia della scienza. Formatosi a Torino, ha prestato servizio presso l'Università di Helsinki e la Scuola Normale Superiore di Pisa. Le sue ricerche si concentrano in modo particolare sulla nozione di verità e sulla filosofia della logica.

ISBN 978-88-6938-232-1

9 788869 382321

€ 16,00