DOI: 10.13137/2039-8646/37704

La matematica come strumento di misura della sostenibilità e predizione delle capacità adattative[*]

Franco Obersnel
Dipartimento di Matematica, Informatica e Geoscienze
Università di Trieste
obersnel@units.it

Andrea Sfecci
Dipartimento di Matematica, Informatica e Geoscienze
Università di Trieste
asfecci@units.it

Abstract

Among the various courses offered to the schools of the Friuli Venezia Giulia region by the University of Trieste, for the PNRR project 'Active orientation in the school-university transition', within the framework of the National Recovery and Resilience Plan, Mission 4 'Education and Research' Investment 1.6, we proposed a didactic activity in mathematics related to the topic of social sustainability. In this contribution, we present a description of the activity carried out, with various ideas that can be used in the curriculum hours or in complementary activities. The topic presented concerns an introduction to discrete dynamical systems, with a focus on linear and exponential growths. The activity was proposed to several classes in the third, fourth and fifth year of high schools. Naturally, methods and topics were adapted according to the level of the students present. Topics considered more challenging or more advanced are marked with the symbol ♣. The lectures were complemented by various group work and workshops, which we report only in part.

Parole chiave

Sostenibilità Sociale / Social Sustainability; Modelli Matematici / Mathematical Models; Sistemi Dinamici / Dynamical Systems; Successioni / Sequences.

1. Introduzione

Il contributo rappresenta una rielaborazione critica del materiale cartaceo preparato per gli studenti in occasione del progetto offerto dall'Università di Trieste alle Scuole

[*] *Title: Mathematics as a tool for measuring sustainability and predicting adaptive capacity.*

secondarie di secondo grado della regione Friuli Venezia Giulia, per il progetto PNRR "Orientamento attivo nella transizione scuola-università", nell'ambito del Piano Nazionale di Ripresa e Resilienza, Missione 4 "Istruzione e ricerca" Investimento 1.6. Il corso, della durata di quattro o cinque ore, prevedeva una parte di presentazione frontale partecipata, laboratori sulle progressioni geometriche, lavori di gruppo con o senza l'utilizzo del computer, eventualmente ricorrendo alla somministrazione di opportuni sussidi elaborati *ad hoc*.

Il corso è stato concepito per essere proposto a studenti del terzo, quarto e quinto anno, pertanto i contenuti e i metodi sono stati di volta in volta opportunamente adattati al livello degli studenti interessati. Argomenti ritenuti più impegnativi o di tipo più avanzato sono di seguito segnalati con il simbolo ♣.

Nella Sezione 2 viene descritta in modo analitico l'attività proposta e in quelle da 3 a 7 si riportano nel dettaglio i contenuti teorici e i lavori proposti agli studenti, sotto forma di esercizi o di laboratori.

Premettiamo che la *sostenibilità sociale* è un problema multidimensionale che coinvolge anche la distribuzione delle risorse, le interazioni umane, le reti sociali, le disuguaglianze e le scelte ottimali. Un'analisi completa richiederebbe l'impiego di diversi rami della matematica, come la *statistica* per l'analisi dei dati demografici ed economici, la *teoria dei giochi* per studiare le decisioni interdipendenti tra attori sociali, o la *teoria dell'ottimizzazione* per allocare risorse scarse.

Tuttavia, considerato l'obiettivo di questo lavoro, abbiamo focalizzato l'attenzione quasi esclusivamente su alcuni *sistemi dinamici discreti*, usando come esempi paradigmatici alcuni *modelli* di crescita di popolazioni (di Malthus e di Verhulst), non entrando nel merito di una discussione più ampia che dovrebbe tener conto della complessità sopra descritta.

2. DESCRIZIONE DEL CORSO

Il corso presentato nel contributo è stato proposto durante sei mattinate a sei gruppi

(ciascuno composto da due o più classi) di Licei scientifici o Istituti tecnici industriali di Trieste e Pordenone. In un'unica occasione il numero degli studenti partecipanti è stato elevato (più di 100), in genere si è attestato intorno ai 40-50.
Le attività si sono svolte in fasi successive:

- *Presentazione del progetto e discussione sul significato del termine "sostenibilità".* Soltanto in poche occasioni gli studenti avevano già discusso in classe sull'argomento "sostenibiltà" in generale. Si è cercato pertanto di spiegare il significato della parola, anche da un punto di vista storico, nelle sue tre accezioni "ambientale, economica, sociale". La presentazione dei concetti è stata inserita in una discussione partecipata, in cui gli interventi dei ragazzi sono stati fondamentali.
- *Spiegazione dell'importanza della matematica nel progetto.* Non è sempre chiaro come la matematica possa inserirsi in un discorso tipicamente politico, sociale, economico come quello sulla sostenibilità. Si è posto quindi l'accento sull'importanza dell'analisi quantitativa del problema, con l'introduzione del concetto di *modello matematico*. Anche in questo caso si è preferito un approccio di discussione partecipata sull'argomento.
- *Le successioni come modelli discreti.* Il concetto di modello matematico è stato introdotto con un particolare accento alla nozione di *funzione* e, più in particolare, di *successione numerica*. Abbiamo visto diversi esempi di successioni, in particolare le *progressioni aritmetica* e *geometrica*.
- *Il gioco della scacchiera.* Prendendo spunto dal canto XVIII del Paradiso (88-93), e anche da una storia pubblicata su *Topolino* 3541 (4 ottobre 2023) – in cui si racconta la leggenda di Sissa Nassir e l'invenzione del gioco degli scacchi – si è proposto un gioco su una scacchiera gigante, con le caselle numerate da n=0 a n=63: abbiamo consegnato a tutti gli studenti alcuni foglietti con delle immagini di vario tipo (da un chicco di riso, a un coniglietto, a una balena, alla piramide di Giza, ai rifiuti prodotti annualmente in Italia, alla quantità di CO_2 prodotta dall'uomo nella storia...); gli studenti dovevano posizionare su ogni casella

l'immagine dell'oggetto che equivaleva in peso a quello del numero di chicchi di riso in quantità 2^n. Il gioco ha offerto l'occasione per parlare di *ordini di grandezza*, *crescita esponenziale*, e ha permesso di coinvolgere tutti i partecipanti. In alcuni casi abbiamo preparato due scacchiere e il gioco è diventato una sfida tra i due gruppi, dichiarando vincitore il gruppo che indovinava più caselle.

- *Crescita lineare e crescita esponenziale.* Ritornati al loro posto, gli studenti hanno studiato le differenze tra le progressioni aritmetiche e geometriche, a partire da alcuni problemi proposti e servendosi anche del computer (utilizzando fogli di calcolo). Spesso gli studenti avevano già dimestichezza con il programma, in alcuni casi invece è stato necessario introdurre i comandi principali e dare le istruzioni passo passo.
- *Il gioco del cobwebbing*. Sono state presentate le nozioni principali sui *sistemi dinamici discreti*. Dopo aver spiegato come si produce un *diagramma a ragnatela* sono stati distribuiti a gruppi di studenti diversi fogli di formato A3, sui quali dovevano riportare il diagramma a ragnatela relativo a una specifica funzione assegnata. A turno i gruppi hanno mostrato il risultato del loro lavoro e si è proposta una discussione sul tipo di sistema dinamico descritto. Si è quindi colta l'occasione per parlare di *stabilità di un equilibrio*.
- *La mappa logistica e altri modelli.* Per alcune classi quinte è stato descritto con particolare cura il sistema dinamico della mappa logistica. In altri casi la presentazione è stata solo accennata. Utilizzando il computer, sono stati descritti altri modelli, presentando diverse situazioni che si possono manifestare, fino a suggerire una definizione non rigorosa di *comportamento caotico*.

Conclusione. L'attività si è conclusa con un intervento partecipato finale, in cui si è ribadita l'importanza della matematica nell'affrontare i temi legati alla sostenibilità.

Le seguenti sezioni illustrano i contenuti proposti agli studenti, ovvero:

- Matematica e sostenibilità;
- I modelli matematici;

- Successioni;
- Sistemi dinamici discreti;
- Modelli di sviluppo di una popolazione, in una variabile;
- Sistemi dinamici in due variabili;

La trattazione include una parte teorica e alcuni laboratori - esercizi; molti di questi sono stati proposti durante il corso come lavori di gruppo.

3. MATEMATICA E SOSTENIBILITÀ

L'uomo ha sempre dovuto affrontare il problema di come bilanciare il soddisfacimento dei propri bisogni con quello di gestire le risorse non illimitate presenti nell'ambiente. Maggiore è la capacità dell'uomo di agire sulla natura, più importanti saranno le conseguenze delle sue scelte e maggiore sarà la sua responsabilità.

La matematica permette di descrivere problemi di grande complessità con la creazione di *modelli* appropriati, che possono in una certa misura aiutare a prevedere le conseguenze delle nostre azioni. Questi modelli sono molto generali e possono trovare applicazione in varie discipline anche molto diverse tra loro, dalla fisica alla biologia, dall'ingegneria alla medicina, dall'economia alle scienze sociali.

Quando si pensa all'applicazione della matematica nello studio delle problematiche legate alla *sostenibilità*, si immagina di voler calcolare valori economici, finanziari o dati numerici quali, ad esempio, la quantità di gas emessi nell'atmosfera, la produzione di rifiuti, il consumo di beni, oppure, eventualmente, di analizzare opportuni dati statistici.

Non sembra così immediato poter applicare la matematica a valori quali il benessere, la salute, l'integrazione sociale, la tutela delle minoranze, la parità di genere, la felicità. Eppure, la necessità di comprendere e gestire il valore sociale, nella sua accezione più ampia, sta diventando sempre più importante in ogni settore, pubblico o privato. La costruzione di metodi per misurare l'impatto sociale delle azioni umane diviene fondamentale per adottare opportune politiche, per capire come indirizzare in modo efficace le risorse verso determinate attività, per comunicare in modo oggettivo le

conseguenze di un cambiamento operato da un'azienda o un'organizzazione, e più in generale per prendere decisioni che possono modificare radicalmente la vita in alcuni casi anche di milioni di persone.

Negli ultimi anni sono state sviluppate diverse metodologie atte a misurare il *valore sociale*; una di queste è, ad esempio, la metodologia SROI (*Social Return on Investment*[1]) che permette di integrare nell'analisi i costi e i benefici non solo economici, ma anche ambientali e sociali di un cambiamento. Una volta scelte le modalità di assegnazione di un valore numerico all'oggetto del nostro studio, la matematica ci permette di analizzare, studiare e, talvolta, di prevedere, l'evoluzione del sistema.

Il concetto di *sviluppo sostenibile* è stato introdotto per la prima volta nel *Rapporto Brundtland* della Commissione Mondiale sull'Ambiente e lo Sviluppo (WCED del 1987[2]), presieduto dalla ministra norvegese Gro Harlem Brundtland. Il Rapporto definisce lo *sviluppo sostenibile* come uno «sviluppo che soddisfi i bisogni del presente senza compromettere la possibilità delle generazioni future di soddisfare i propri».

Il tema di uno sviluppo che non può crescere in modo incontrollato era comunque già stato dibattuto. In particolare, nell'aprile del 1968, l'imprenditore italiano Aurelio Peccei[3] e lo scienziato scozzese Alexander King fondarono il "Club di Roma" e conquistarono l'attenzione dell'opinione pubblica con il *Rapporto sui limiti dello sviluppo* (*Rapporto Meadows*, 1972[4]) il quale prediceva che la crescita economica non potesse continuare indefinitamente a causa della limitata disponibilità di risorse naturali e della limitata capacità di assorbimento degli inquinanti da parte del pianeta.

Nel loro commento finale, i membri del Club di Roma affermarono anche che:

- la presa di coscienza dei vincoli quantitativi è una condizione essenziale per una revisione fondamentale del comportamento umano e dell'intero tessuto della società;
- la pressione demografica ha già raggiunto un livello tale da costringere l'umanità

[1] Cfr. THEN *et al.* 2017.
[2] Cfr. WORLD COMMISSION ON ENVIRONMENT AND DEVELOPMENT 1987.
[3] Cfr. PECCEI A. 1971.
[4] Cfr. MEADOWS DO. *et. al.* 1972 e aggiornamenti successivi.

a ricercare un nuovo stato di equilibrio sul nostro pianeta;

- per arrivare all'equilibrio è necessario che si arrivi a migliorare le condizioni del Terzo Mondo, e ciò potrà avvenire solo grazie a una strategia globale;
- lo sviluppo globale sarà ottenibile soltanto affrontando insieme la complessità e la profonda interconnessione dei problemi del mondo, tra cui si deve ricordare la relazione dell'uomo con l'ambiente;
- benché la problematica del mondo sia composta in buona parte da elementi imponderabili, l'approccio quantitativo è uno strumento indispensabile per affrontarla;
- l'Umanità deve affrontare con urgenza una situazione sbilanciata che si sta velocemente deteriorando;
- questo sforzo è una sfida suprema della nostra generazione, e si deve agire velocemente.

Sottolineiamo la presenza in questi commenti di chiari riferimenti alla matematica: *vincoli quantitativi*, *stato di equilibrio*, *complessità*, *approccio quantitativo*.

In ambito sociale, il concetto di sostenibilità riguarda il diritto di un essere umano di poter vivere in un contesto ambientale e socio-economico che gli consenta di poter esprimere la propria individualità; indica il processo di cambiamento volto a raggiungere l'equità nella società, e si realizza attraverso l'eliminazione della povertà e la realizzazione di condizioni di dignità di base per la vita di ogni uomo.

Per rendere il pianeta più sostenibile dal punto di vista sociale occorre analizzare, comprendere l'impatto di un'azione, prevedere, ottimizzare ..., tutte azioni per le quali sarebbe comodo possedere una "sfera di cristallo"; in mancanza di questa si può ricorrere alla matematica. La matematica permette infatti di analizzare in modo oggettivo una situazione, simulare un processo per comprendere l'impatto di un'azione, prevedere una situazione futura, ottimizzare un processo.

4. I MODELLI MATEMATICI

Un *modello matematico* descrive un problema reale in termini matematici, tipicamente

nella forma di *equazioni*, e usa queste relazioni per aiutare nella comprensione del problema, nello scoprire nuove caratteristiche e nel prevedere l'evoluzione futura del problema stesso.

Diversi attori intervengono nello strutturare un modello. L'esperto dei fenomeni reali individua il problema, stabilisce le *variabili* dipendenti e indipendenti, assieme al matematico definisce le *relazioni* e costruisce il *modello matematico* che rappresenta in astratto il fenomeno.

Spetta al matematico stabilire se le relazioni sono sufficienti, tipicamente dimostrando alcuni risultati di esistenza e molteplicità delle soluzioni. In alcuni contesti sono attesi risultati di unicità, mentre in altre situazioni i modelli possono ammettere più soluzioni. Va poi sottolineato che è importante lo studio della stabilità di tali soluzioni e l'eventuale loro dipendenza continua rispetto ai dati del problema. Se queste non sono calcolabili esplicitamente, è necessario ricercarle mediante approssimazioni numeriche. Successivamente, le soluzioni ricavate devono essere confrontate con i dati ottenuti dal fenomeno reale, in modo da convalidare il modello o richiedere opportune modifiche. Un modello spesso assume l'aspetto di un sistema di equazioni differenziali, ma esistono anche modelli geometrici, algebrici, topologici, ecc. A volte un modello matematico viene costruito *ad hoc* per affrontare un problema. Molto spesso, però, un modello costruito per *analizzare* un fenomeno si presta alla descrizione di un gran numero di problemi che emergono da situazioni ben diverse.

In questo contributo vedremo alcuni esempi di *modelli discreti*, modelli in cui le funzioni incognite sono costituite da *successioni* $(x_n)_n$, e le relazioni prevedono operazioni elementari, a differenza dei *modelli continui*, in cui le funzioni incognite sono definite su intervalli reali e le relazioni coinvolte sono tipicamente di tipo differenziale.

♣ Spesso, in un modello, si riesce a esprimere la "variazione" Δ della quantità studiata, in funzione delle diverse variabili. Nei modelli continui la variazione è rappresentata dalla *derivata* della funzione incognita e si parla di *equazioni differenziali* (o "alle derivate"), nei modelli discreti la variazione è rappresentata dalla differenza $x_{n+1} - x_n$ e si parla di "*equazioni alle differenze*".

5. SUCCESSIONI

Siano D e C due insiemi. Diremo *funzione* una relazione (che indicheremo con $f: D \rightarrow C$) tra gli oggetti di D e gli oggetti di C che soddisfa la proprietà seguente:

«a ogni elemento di D viene associato uno e un solo elemento di C»

L'insieme D si dice il *dominio* della funzione, l'insieme C si dice il *codominio* della funzione. Diremo *immagine* di $f: D \rightarrow C$ l'insieme $Im(f) = f(D)$ dei valori assunti da f:

$$Im(f) = \{f(d) : d \in D\}$$

Non è detto che $Im(f)$ coincida con C. Se questo accade diremo che la funzione è *suriettiva*. Si osservi che $Im(f)$ è l'insieme degli elementi $c \in C$ per cui l'equazione $f(x) = c$ ammette soluzioni $x \in D$. In generale, l'equazione $f(x) = c$ può avere più di una soluzione (anche infinite, si pensi a una funzione costante). Se per ogni $c \in C$ per cui l'equazione $f(x) = c$ ha soluzione, questa è unica, la funzione si dice *iniettiva*. Diremo *grafico* di $f: D \rightarrow C$ il sottoinsieme Γ_f del *prodotto cartesiano* $D \times C$ definito da

$$\Gamma = \{\big(d, f(d)\big) \in D \times C : d \in D\}.$$

Diremo *successione* una funzione $f: E \subset \mathbb{N} \rightarrow C$ (talvolta si considera $E \subset \mathbb{Z}$) definita su un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{Z}$), dove $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei *numeri naturali* e $\mathbb{Z}$ indica l'*insieme* dei *numeri interi*.

Si usa scrivere a_n (o x_n, y_n, ecc.) anziché $f(n)$. La successione si indica solitamente con $(x_n)_n$.

Esempio 5.1. Sia $c \in \mathbb{R}$. La successione $(a_n)_n$ dove $a_n = c$ per ogni n è una successione costante. Tutti i termini della successione sono quindi uguali a c.

Esempio 5.2. La successione di numeri reali $\left(\frac{1}{n}\right)_n$, definita per $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. I primi termini della successione sono $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ Si osservi che, per ogni *numero reale* positivo, anche molto piccolo, ε, esiste un numero naturale n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$,

si ha $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Questo fatto si esprime dicendo che 0 è il *limite* della successione $\left(\frac{1}{n}\right)_n$, quando n tende a infinito e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Esempio 5.3. La successione di numeri reali $x_n = -3 + \frac{1}{2}n$ è un esempio di *progressione aritmetica* (di ragione $\frac{1}{2}$). I primi termini della successione sono

$$-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \ldots$$

Si osservi che, per ogni numero reale positivo M, anche molto grande, esiste un numero naturale n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$, si ha $x_n > M$. Ad esempio, fissato un qualunque M, basterà prendere $n_0 \geq 6 + 2M$. Questo fatto si esprime dicendo che il limite della successione $x_n = -3 + \frac{1}{2}n$, quando n tende a infinito, è $+\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(-3 + \frac{1}{2}n\right) = +\infty$$

Esempio 5.4. La successione di numeri reali $x_n = \frac{7}{6} \cdot 3^n$ è un esempio di *progressione geometrica* (di ragione 3). I primi termini della successione sono

$$\frac{7}{6}, \frac{7}{2}, \frac{21}{2}, \frac{63}{2}, \ldots$$

Anche in questo caso si ha che il limite della successione, quando n tende a infinito, è $+\infty$.

Esempio 5.5. Consideriamo la successione $(a_n)_n$ definita per ricorrenza, tale che $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$. Si osservi che in questo caso non appare evidente una formula esplicita che ci indica il valore a_n. Per conoscere a_4, ad esempio, dobbiamo conoscere a_3, per conoscere a_3 dobbiamo conoscere a_2, e così via. I primi termini della successione sono:

$$1, 2, \frac{5}{2}, \frac{29}{10}, \frac{941}{290}, \dots$$

Esempio 5.6. La *successione di Fibonacci*, definita per ricorrenza, è la successione di numeri naturali tale che $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Come nell'esempio 5.5, anche in questo caso non è evidente una formula esplicita che ci indica il valore a_n. Ora però, per conoscere ad esempio il valore di a_{10}, non è sufficiente conoscere il valore di a_9, ma dobbiamo conoscere i termini a_8 e a_9. I primi termini della successione sono 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 …

Esempio 5.7. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Fissiamo un valore $x_0 \in \mathbb{R}$. Possiamo definire una successione $(x_n)_n$ ponendo, per ricorrenza, $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n > 0$. I primi termini della successione sono quindi

$$x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f\big(f(x_0)\big), x_3 = f(x_2) = f\big(f(x_1)\big) = f\left(f\big(f(x_0)\big)\right), \dots$$

Ad esempio, ponendo $f(x) = x + \frac{1}{2}$ e $x_0 = -3$, si ottiene la successione dell'Esempio 5.3; ponendo $f(x) = 3x$ e $x_0 = \frac{7}{6}$, si ottiene la successione dell'Esempio 5.4, ponendo $f(x) = x + \frac{1}{x}$ si ottiene la successione dell'Esempio 5.5.

Laboratorio 5.1. ♣ Si trovi una funzione f che permetta di definire la successione dell'esempio 3.2 nella forma $x_{n+1} = f(x_n)$.

Laboratorio 5.2.(Successioni e grafici). Si rappresentino mediante un grafico cartesiano in $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ le successioni considerate negli esempi 5.1, 5.6, 5.2, 5.3, 5.4.

Laboratorio 5.3. Una banca propone due tipologie di investimento:

⋆ *Investimento lineare.* Un titolo finanziario acquistato a 1000 euro rende ogni anno 10 euro. Dopo n anni pertanto troverò nel conto $x_n = 1000 + 10 \cdot n$ euro.

⋆ *Investimento a interesse composto.* Un titolo finanziario rende un interesse annuale dello 0,1%. Investendo $x_0 = 1000$ euro, dopo un anno trovo nel conto:

$$x_1 = x_0 + 0{,}001 \cdot x_0 = x_0(1 + 0{,}001) = 1000 \cdot (1 + 0{,}001) \text{ euro;}$$

dopo due anni

$$x_2 = x_1 + 0{,}001 \cdot x_1 = x_1 \cdot (1 + 0{,}001)$$
$$= x_0 \cdot (1 + 0{,}001) \cdot (1 + 0{,}001) = 1000 \cdot (1 + 0{,}001)^2 \text{ euro;}$$

dopo n anni

$$x_n = 1000 \cdot (1 + 0{,}001)^n \text{ euro}$$

Si confrontino le due tipologie di investimento. Si disegnino i grafici delle successioni. In quale situazione è più redditizio l'investimento lineare e in quale situazione quello a interesse composto?

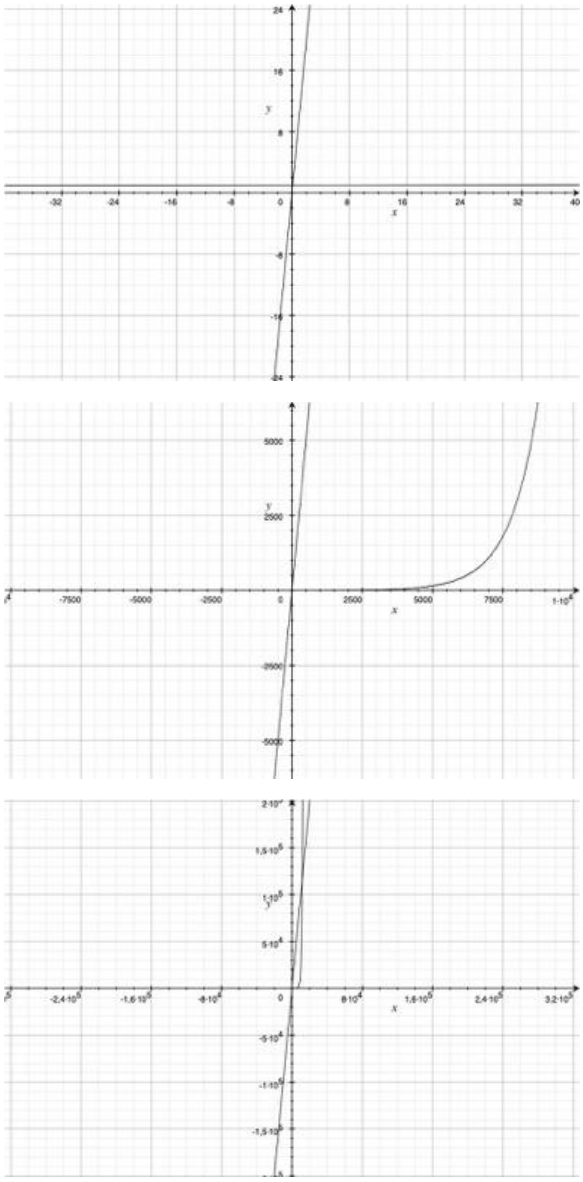

Figura 1. I grafici delle funzioni $g(x) = 10x$ e $h(x) = (1 + 0{,}001)^x$ a tre scale diverse.

♣ **Nozione di limite di una successione.** Sia $(a_n)_n$ una successione a valori reali e $l \in \mathbb{R}$. Si dice che l è il limite della successione e si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ se, scelto comunque un numero positivo $\varepsilon > 0$, esiste un numero abbastanza grande n_0 tale che $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$.
Diremo invece che $+\infty$ è il limite della successione, e si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ se, scelto comunque un numero $M \in \mathbb{R}$, esiste un numero abbastanza grande n_0 tale che $a_n \geq M$ per ogni $n \geq n_0$.

• *Numero di Nepero e.* Si definisce $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Il numero *e* è un numero irrazionale trascendente, più grande di 2 e più piccolo di 3.

• Due formule utili: per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$, si ha

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Laboratorio 5.4 (Formule utili). ♣ Si dimostrino le due formule descritte sopra.

♣ **Confronti asintotici.** Supponiamo $m > 0$, $a > 1$, $y_0 > 0$ e confrontiamo tra loro la crescita lineare $x_n = x_0 + n \cdot m$ (scegliendo $x_0 = 1000$ e $m = 10$ otteniamo l'investimento lineare visto sopra) e la crescita esponenziale $y_n = y_0 \cdot a^n$ (scegliendo $y_0 = 1000$ e $a = 1{,}001$ otteniamo l'investimento a interesse composito visto precedentemente). Entrambe le successioni tendono a $+\infty$ quando n tende a infinito. Possiamo confrontare i due tipi di divergenza?

Teorema 5.1.♣ Per qualsiasi $m > 0, a > 1, y_0 > 0$, esiste n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$, si ha $y_n > x_n$. Anzi, possiamo dire che per ogni numero $M \in \mathbb{R}$, esiste n_M tale che, per ogni $n \geq n_M$, si ha $y_n > M \cdot x_n$.
Dimostrazione. Poiché $a > 1$ si può scrivere $a = 1 + \sigma$, con $\sigma > 0$. Il teorema si può dimostrare facilmente se sappiamo che, per ogni $n \geq 2$, si ha

$$(\blacksquare) \qquad (1 + \sigma)^n \geq 1 + n\,\sigma + \frac{n(n-1)}{2}\sigma^2.$$

Questa disuguaglianza si ottiene immediatamente se si conosce la formula del *binomio di Newton*: per ogni $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+$, si ha

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k$$

con i coefficienti binomiali definiti da $\binom{n}{0} = 1$ e, per $0 \leq k \leq n$, dalla formula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(\mathrm{n}-\mathrm{k}+1)}{k!}$$

(In alternativa si può dimostrare la disuguaglianza per induzione su $n \geq 2$).

Supponiamo dunque dimostrata la (■) . Si ha allora, per ogni $n \geq 2$, $(1+\sigma)^n > \frac{n(n-1)}{2}\sigma^2$.
Proveremo che, per n abbastanza grande, si ha

$$y_0 \frac{n(n-1)}{2}\sigma^2 > M(x_0 + n \cdot m),$$

cioè, dividendo per n,

$$y_0 \frac{n-1}{2}\sigma^2 > \frac{Mx_0}{n} + Mm.$$

Scegliamo n così grande da soddisfare contemporaneamente $n > Mx_0$ (in questo modo sappiamo che $1 + mM > \frac{Mx_0}{n} + mM$), e

$$n > \frac{2(1+mM)}{\sigma^2 y_0} + 1,$$

cosicché

$$y_0 \frac{n-1}{2}\sigma^2 > 1 + mM > \frac{Mx_0}{n} + mM.$$

Allora si ha

$$y_n = y_0(1+\sigma)^n > y_0 \frac{n(n-1)}{2}\sigma^2 > M(x_0 + n \cdot M).$$

La proprietà descritta nel teorema si esprime dicendo che l'esponenziale $y_n = y_0 \cdot a^n$ ha ordine di infinito superiore all'ordine di infinito di $x_n = n_0 + n \cdot m$. In realtà si può dimostrare molto di più. Infatti l'ordine di infinito dell'esponenziale è superiore a quello di qualsiasi potenza del tipo $z_n = n^k$, con $k \in \mathbb{N}$.

Laboratorio 5.5 (Confronti asintotici). Utilizzando il foglio di calcolo, si confrontino diverse crescite lineari, potenze, esponenziali.

6. SISTEMI DINAMICI DISCRETI

Abbiamo visto negli esempi 5.5, 5.6, e più in generale 5.7, che alcune successioni non sono definite mediante una descrizione esplicita del valore x_n, ma mediante una relazione tra i termini consecutivi della successione. Questo accade molto spesso quando la successione rappresenta un modello di un fenomeno che vogliamo studiare. Consideriamo il seguente esempio.

Modello del contagio. Si vuole studiare un modello che rappresenti il contagio di una malattia per cui ipotizzo che ogni persona infetta contagi due persone sane al giorno. Questo significa che dopo $n + 1$ giorni avremo un numero di infetti pari a

$$x_{n+1} = x_n + 2x_n = 3x_n$$

(x_n sono già infette, ciascuna di queste ne contagia altre due). Possiamo scrivere $x_{n+1} = f(x_n)$, con $f(x) = 3x$. Supponiamo di voler calcolare il numero di infetti dopo 30 giorni, cioè x_{30}. Per calcolare x_{30}, il numero di infetti dopo 30 giorni, applicando la formula, dovrei conoscere x_{29}, il numero di infetti dopo 29 giorni. A cascata questo richiede di conoscere x_{28}, x_{27}, … e così via fino ad arrivare a x_0.

Il conto può essere fatto in questo modo ma risulta alquanto laborioso. Inoltre, è chiaro che la situazione cambia in base alla scelta del valore x_0 (il valore iniziale). Ad esempio, se nell'istante iniziale abbiamo $x_0 = 0$ infetti, la malattia non si propaga e la successione $(x_n)_n$ sarà la successione costante $x_n = 0$ per ogni n.

Una volta fissato il valore x_0, la successione $(x_n)_n$ è ben definita; effettuando tutti i calcoli si può ottenere il valore x_{30}, tuttavia ci si può chiedere se esiste un modo esplicito più comodo per ottenere direttamente il valore x_{30}. In questo caso non è difficile scoprire che avremo $x_{30} = 3^{30}x_0$.

In generale, molte situazioni si possono esprimere nella forma

$$(\star) \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

con $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice soluzione dell'equazione $(\star)$ una successione $(x_n)_n$ che verifica la relazione $(\star)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La soluzione dell'equazione $(\star)$ non è unica, questa dipende dalla condizione iniziale x_0. Una volta fissato x_0, tutti i valori x_n della successione possono essere calcolati.

Studiare la famiglia delle soluzioni di $(\star)$ al variare delle condizioni iniziali x_0, o anche al variare di alcuni parametri che possono apparire nell'espressione della funzione f, è l'argomento studiato dalla *teoria dei sistemi dinamici* (in questo caso *discreti*). Una buona introduzione ai sistemi dinamici discreti si trova in *A Course in Mathematical Biology*[5]; un classico sulla dinamica delle popolazioni, di livello più avanzato,

[5] Cfr. DE VRIES *et al.* 2006.

è *The struggle for Existence*[6]. Suggeriamo, in italiano, le opere *Modelli matematici in Biologia*[7] e *Modelli matematici, elementi introduttivi*[8].

Cobwebbing (diagramma a ragnatela). Un modo utile per studiare graficamente un sistema dinamico discreto definito da una funzione f è la costruzione del "*cobwebbing*". Tracciamo il grafico della funzione f e la bisettrice del primo e terzo quadrante. Prendiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e cerchiamo sul grafico il punto $(x_0, f(x_0))$. Ricordiamo che vale $x_1 = f(x_0)$. Tracciamo la retta parallela all'asse delle ascisse passante per questo punto, in modo da trovare l'intersezione con la bisettrice. Questo è il punto (x_1, x_1). Tracciamo il segmento verticale che congiunge questo punto al grafico della funzione e troviamo il punto $(x_1, f(x_1))$. In particolare individuiamo il valore $x_2 = f(x_1)$. A questo punto ci spostiamo nuovamente orizzontalmente verso la bisettrice trovando il punto (x_2, x_2). Da qui iteriamo la procedura. Continuando in questo modo potremo visualizzare diversi valori della successione.

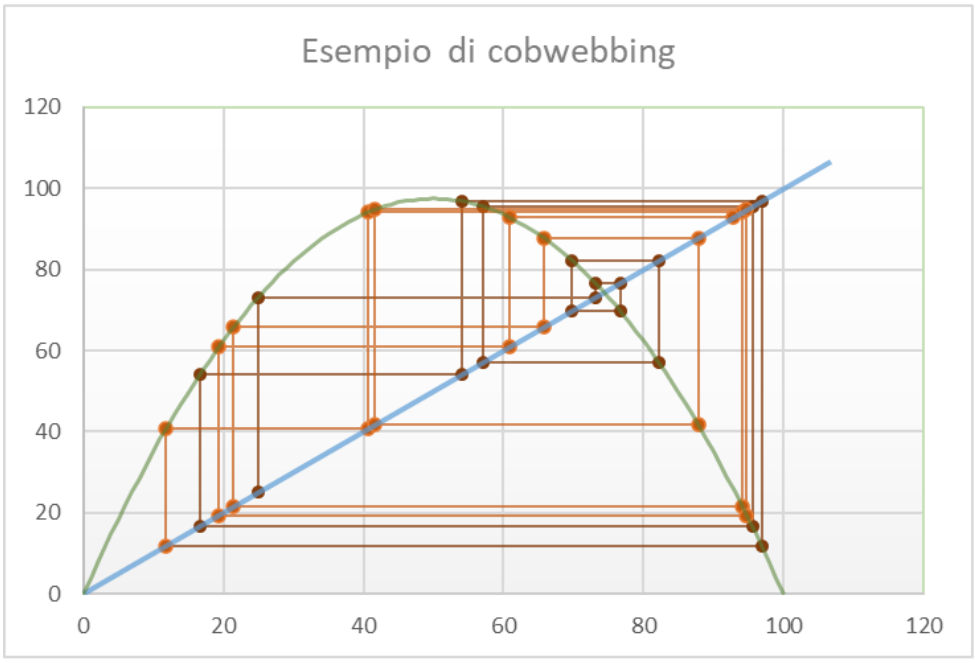

Figura 2. Esempio di diagramma a ragnatela.

[6] Cfr. GAUSE 2019.
[7] Cfr. GAETA 2007.
[8] Cfr. COMINCIOLI 2004.

Il *diagramma a ragnatela* è uno strumento molto utile per lo studio del sistema dinamico associato all'equazione. Ad esempio ci aiuta a capire se le soluzioni sono tutte simili una all'altra, o se differiscono qualitativamente quando cambia il valore iniziale. In particolare ci può aiutare a identificare eventuali equilibri o cicli limite, e la loro stabilità, o fenomeni di tipo caotico.

Soluzioni particolari. Alcune soluzioni dell'equazione sono di particolare interesse, perché forniscono informazioni sull'intero sistema dinamico. Tra queste, fondamentali sono gli *equilibri*, cioè le soluzioni costanti.

Ad esempio, nello studio di un contagio esiste sempre la soluzione costante $x_n = 0$ per ogni n, relativa al valore iniziale in cui non ci sono persone infette. Ma spesso esistono altre soluzioni costanti (nel caso del modello di un'epidemia, un equilibrio non nullo si dice *equilibrio endemico*, in questo caso il numero di persone infette resta costante, tanti sono i nuovi contagiati quanti sono i guariti).

Si tenga presente che una soluzione può non essere costante ma può diventarlo da un certo momento in poi. Ad esempio, in qualche modello che descrive la popolazione di una specie, può accadere che a partire da un numero x_0 troppo esiguo di individui si vada presto a finire sull'equilibrio nullo, cioè la specie si estingue. Soluzioni interessanti sono anche quelle *periodiche*, in cui l'andamento si ripete dopo un certo numero di iterazioni. In questo caso si parla di k-cicli, quando dopo k iterazioni ritorniamo al punto di partenza.

• *Equilibrio.* Una soluzione costante del problema $(\star)$ si dice *equilibrio*. Gli equilibri del problema si possono calcolare determinando i punti fissi della funzione f, cioè i valori $x \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) = x$. Infatti, se $x_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $f(x_0) = x_0$, si ha

$$x_1 = f(x_0) = x_0, \qquad x_2 = f(x_1) = f(x_0) = x_0$$

e così via.

Nel *cobwebbing*, i punti di equilibrio sono le ascisse delle intersezioni del grafico della funzione con la bisettrice del primo e terzo quadrante.

Esempio 6.1. Consideriamo il sistema dinamico definito dalla funzione $f(x) = x(x-1)$. Le soluzioni con valore iniziale $x_0 = 0$ oppure $x_0 = 2$ sono equilibri, poiché $f(0) = 0$ e $f(2) = 2$. La soluzione con valore iniziale $x_0 = 1$ non è costante, ma "va a finire" subito nell'equilibrio 0 dopo soltanto un'iterazione: $x_0 = 1$, $x_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. Anche la soluzione con valore iniziale $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ "va a finire" nell'equilibrio 0, in questo caso dopo due iterazioni: $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_1 = 1$, $x_n = 0$ per ogni $n \geq 2$.

• *k-ciclo.* Una soluzione si dice un k-ciclo se soddisfa l'identità $x_{n+k} = x_n$ per ogni n. Un k-ciclo è pertanto una soluzione periodica di periodo k. Un 1-ciclo è un equilibrio. Nel *cobwebbing* un k-ciclo appare come una curva spezzata chiusa, in particolare un 2-ciclo appare come un rettangolo.

Esempio 6.2. Consideriamo il sistema dinamico definito dalla funzione $f(x) = 1 - x$. In questo caso ogni soluzione del sistema dinamico è un 2-ciclo. Infatti, per qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $x_2 = f(f(x_0)) = 1 - (1 - x_0) = x_0$, e quindi $x_0 = x_0$, $x_1 = 1 - x_0$, $x_2 = x_0$, $x_3 = 1 - x_0$, …

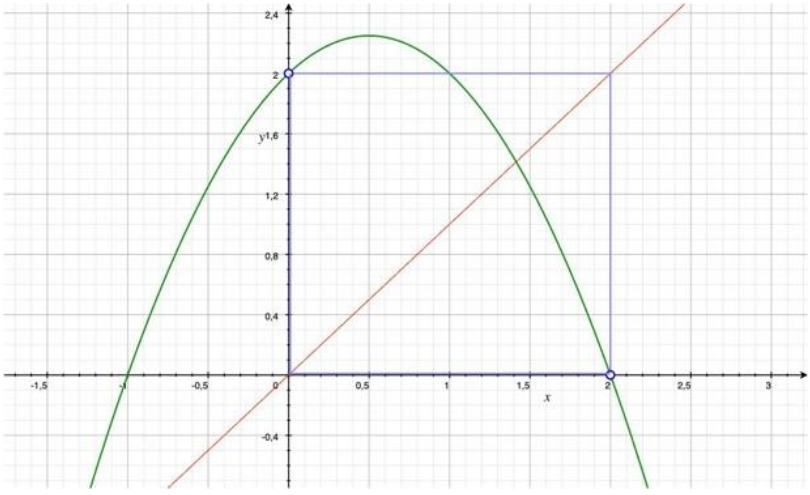

Figura 3. Esempio di 2-ciclo.

• *Stabilità.* Il comportamento del sistema dinamico quando siamo vicini al punto di equilibrio, ma non sull'equilibrio, è di fondamentale importanza. Supponiamo ad esempio di avere un modello che descriva l'evoluzione di un'epidemia e di aver identificato un equilibrio $x_0 > 0$ (in questa situazione si parla di *equilibrio endemico*).

L'equilibrio individua un numero di infetti che resta costante nel tempo, tanti vengono contagiati quanti guariscono. Cosa succede se ci scostiamo leggermente dall'equilibrio (magari utilizzando dei medicinali, o adottando delle pratiche per diminuire le occasioni di contagio)?

Può essere che ricadiamo velocemente nel punto di equilibrio e quindi l'epidemia persiste, oppure ci allontaniamo in maniera considerevole e magari la malattia va estinguendosi (cioè andiamo a finire nell'equilibrio nullo). Nel primo caso l'equilibrio si dice *stabile* (piccoli scostamenti dalla posizione vengono presto recuperati per tornare alla posizione di equilibrio), nel secondo caso l'equilibrio si dice *instabile* (un piccolo scostamento dall'equilibrio comporta un allontanamento dall'equilibrio stesso). In generale un equilibrio si dice stabile se un'orbita che parte vicina all'equilibrio resta vicina all'equilibrio, se invece si allontana dall'equilibrio, si dice instabile.

Laboratorio 6.1. Si studi l'equilibrio di un sistema dinamico lineare definito da una funzione del tipo $f(x) = mx + q$, in funzione del parametro m.

Modelli lineari. Un modello in cui la funzione f ha come grafico una retta, quindi $f(x) = mx + q$ per qualche $m, q \in \mathbb{R}$, si dice *lineare*.

Vediamo i diversi casi che possono capitare.

• $m = 0$. In questo caso il sistema dinamico è rappresentato dall'equazione

$$x_{n+1} = 0 \cdot x_n + q = q$$

e quindi la soluzione non dipende dalla condizione iniziale x_0, è sempre la successione costante di valore q.

• $m = 1$. In questo caso il sistema dinamico è rappresentato dall'equazione $x_{n+1} = x_n + q$.

Si osserva che la variazione $x_{n+1} - x_n = q$ è costante (non dipende da n). Fissato un valore iniziale x_0 avremo pertanto

$$x_1 = x_0 + q,\ x_2 = x_1 + q = x_0 + 2q, \qquad \dots\ x_n = x_0 + nq$$

Abbiamo espresso facilmente la soluzione in modo esplicito. La successione in questo caso si dice una *successione* (o *progressione*) *aritmetica* di ragione q. Ad esempio, se $x_0 = -3$ e $q = \frac{1}{2}$ si ottiene la successione dell'Esempio 5.3.

Osserviamo che il grafico della funzione f è una retta parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Pertanto non ci sono equilibri (tranne nel caso banale $q = 0$ in cui tutte le soluzioni sono costanti). Osserviamo che le soluzioni sono tutte simili tra loro per qualunque valore di x_0 (sono traslate una rispetto all'altra ma sono qualitativamente uguali).

In particolare, sono tutte successioni strettamente crescenti se $q > 0$ e strettamente decrescenti se $q < 0$.

• $m \neq 1$. In questo caso il sistema dinamico è rappresentato dall'equazione

$$x_{n+1} = m \cdot x_n + q$$

Poiché $m \neq 1$, la retta di equazione $y = mx + q$ interseca la bisettrice del primo e terzo quadrante nell'unico punto $x_0 = \frac{q}{1-m}$. Il sistema dinamico ha pertanto uno e un solo equilibrio.

Supponiamo che sia $q = 0$ e quindi l'equilibrio si ha nel punto $x_0 = 0$ (in generale è possibile ricondursi a questa situazione con un opportuno cambio di variabili). Si osserva in questo caso che il rapporto $\frac{x_{n+1}}{x_n} = m$ è costante (non dipende da n).

Fissato un valore iniziale $x_0 \neq 0$ avremo pertanto $x_1 = m \cdot x_0$, $x_2 = m \cdot x_1 = m^2 \cdot x_0$, …, $x_n = m^n \cdot x_0$. Anche in questo caso abbiamo espresso facilmente la soluzione in modo esplicito. La successione in questo caso si dice una *successione* (o *progressione*) *geometrica* di ragione m. Ad esempio, se $x_0 = \frac{7}{6}$ e $a = 3$ si ottiene la successione dell'Esempio 5.4.

Nella progressione geometrica, la variazione $x_{n+1} - x_n = (m-1) \cdot x_n$ è proporzionale al valore della successione. Si dice in questo caso che la crescita (relativa, quindi possibilmente anche una decrescita) è di tipo esponenziale. Se $m > 1$, qualunque sia

il valore iniziale $x_0 \neq 0$, la successione è crescente; se $0 < m < 1$ la successione è decrescente. Se $m < 0$ la successione non è né crescente, né decrescente, e i valori x_n cambiano segno a ogni passo.

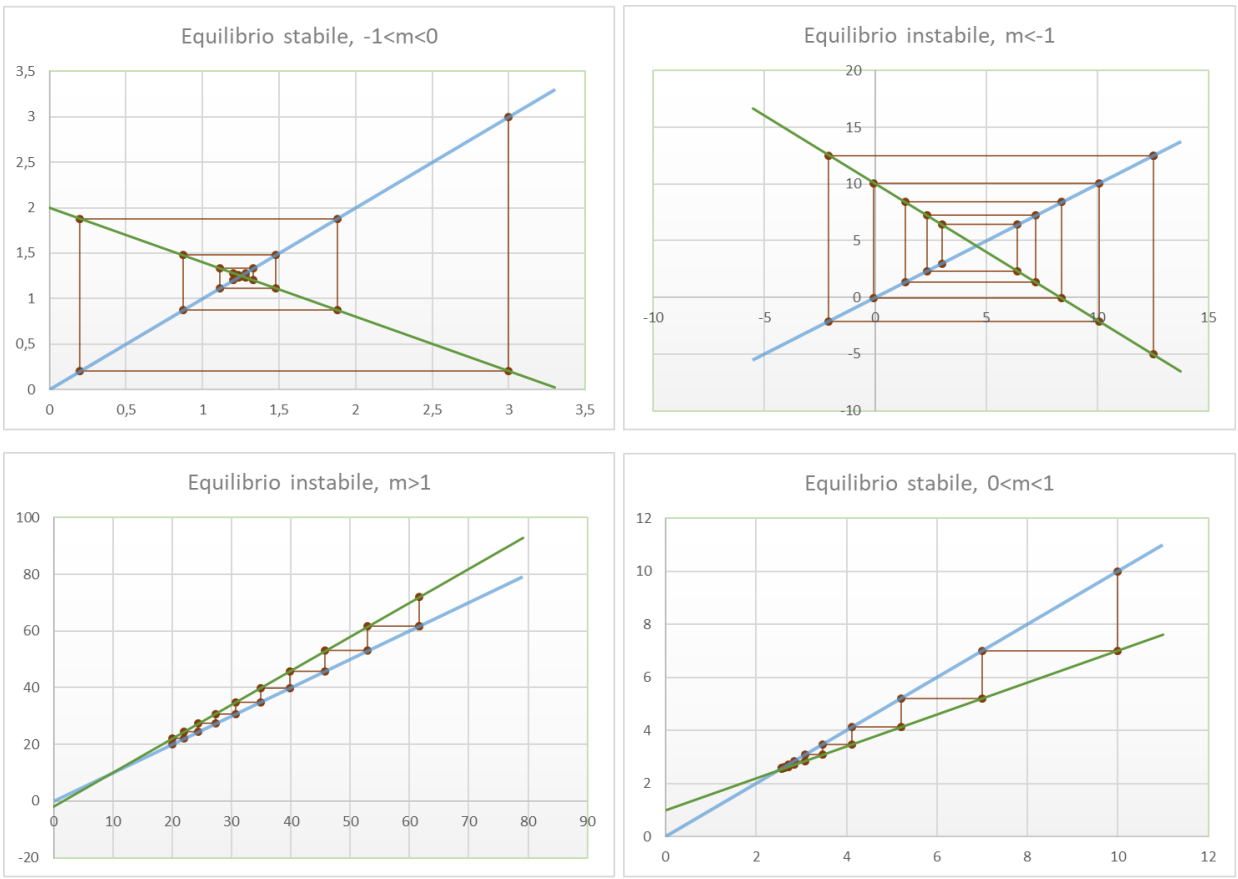

Figura 4. Stabilità dell'equilibrio nei modelli lineari.

Stabilità di un equilibrio. La stabilità dell'equilibrio nel modello lineare è determinata dal valore m. Se $|m| > 1$ l'equilibrio è instabile; se $|m| < 1$ l'equilibrio è stabile.

♣ In un modello non lineare, la stabilità di un equilibrio può essere studiata "linearizzando" il problema vicino all'equilibrio, cioè sostituendo il grafico della funzione con la retta tangente il grafico nel punto (questo si può fare facilmente se si hanno alcune nozioni di analisi matematica, in particolare il concetto di *derivata*). Sia m il coefficiente angolare di tale retta, si ha allora

⋆ se $|m| > 1$ l'equilibrio è instabile;

⋆ se $|m| < 1$ l'equilibrio è stabile.

Laboratorio 6.2. Si consideri il sistema dinamico definito dalla funzione $f(x) = 2 + x - x^2$.

Si trovino gli equilibri.

Si costruisca il diagramma a ragnatela relativo ai valori iniziali

$$x_0 = -2,\ x_0 = -\sqrt{2},\ x_0 = -1,\ x_0 = 0,\ x_0 = 1, \qquad x_0 = \frac{1}{2}$$

Possiamo dire qualcosa a proposito della stabilità degli equilibri?

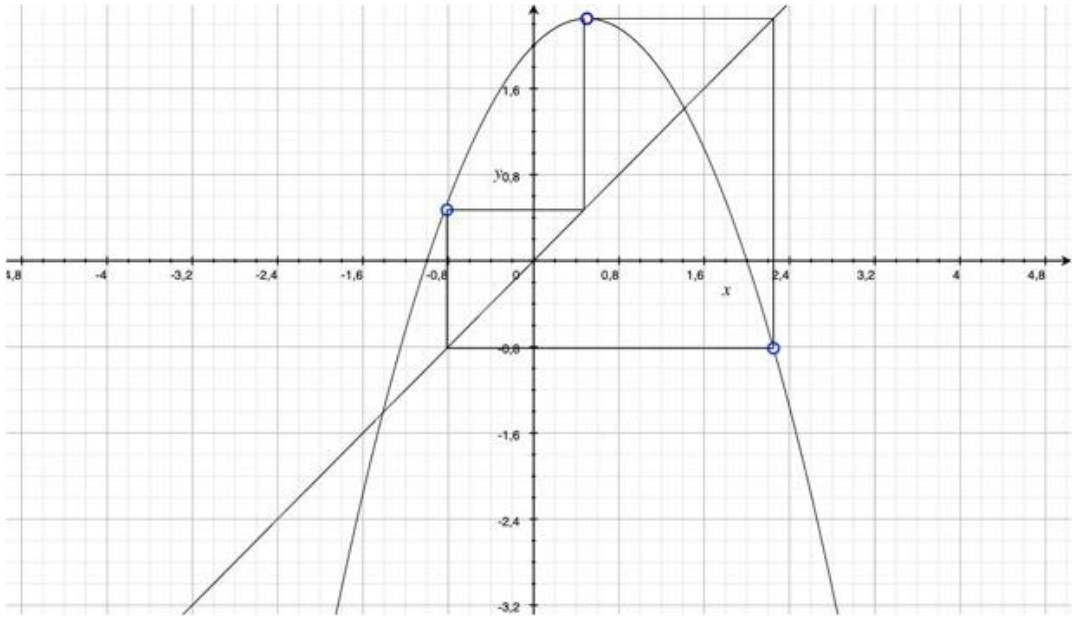

Figura 5. Diagramma per il Laboratorio 6.2.

(Nel grafico sono segnati i primi punti dell'orbita con $x_0 = \frac{1}{2}$; non è chiusa, ma quasi...).

♣ **Equazioni alle differenze ed equazioni differenziali.** L'equazione $(\star)$ può essere scritta nella forma

$$(*) \quad \Delta n = \varphi(x_n)$$

dove $\Delta n = x_{n+1} - x_n$ rappresenta la "variazione" e $\varphi(x) = f(x) - x$. La relazione $(*)$ pone l'attenzione sulla variazione ed esprime il fatto che questa dipende funzionalmente dal valore della variabile incognita x al passo n, secondo una legge assegnata.

Ricordiamo che una successione è un particolare tipo di funzione e che $x_n = x(n)$. Osserviamo che l'equazione $(*)$ si può scrivere nella forma

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} = \varphi(x(n))$$

La quantità al primo membro dell'equazione si chiama *rapporto incrementale* (è il rapporto tra l'incremento della variabile x e l'incremento della variabile n). Se passiamo dal modello discreto al

modello continuo, se cioè la nostra incognita x è una funzione $x = x(t)$ definita su un intervallo reale, l'equazione diventa

$$\frac{x(t+1) - x(t)}{(t+1) - t} = \varphi(x(t))$$

Nelle successioni, l'incremento più piccolo che si possa considerare è $(n+1) - n = 1$. Ora invece, si può considerare un incremento arbitrariamente piccolo $(t+\tau) - t = \tau$. L'equazione pertanto si generalizza facilmente a

$$\frac{x(t+\tau) - x(\tau)}{\tau} = \varphi(x(t))$$

Prendendo nell'espressione il limite per $\tau \to 0$ si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt}(t) = \varphi(x(t))$$

dove

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{x(t+\tau)-x(\tau)}{\tau}$$

è la derivata della funzione x al tempo t.

7. MODELLI DI SVILUPPO DI POPOLAZIONI IN UNA VARIABILE

In questa sezione sono presentati alcuni modelli in una variabile. In particolare si intende focalizzare l'attenzione su modelli che descrivono l'andamento nel tempo di una popolazione (questa può essere umana, animale, vegetale o anche una coltura batterica).

Il primo modello, lineare, è stato proposto a fine '700 dall'abate T. Malthus[9], per mostrare come l'aumento delle risorse dovute al progresso non può mai essere sufficiente per compensare l'aumento della popolazione.

Il modello esponenziale di Malthus. La crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa.

$$x_{n+1} = f(x_n), \text{ con } f(x) = ax.$$

[9] Cfr. MALTHUS 1798.

Si può notare che l'equazione presente nel precedente modello è quella che ha come soluzioni le progressioni geometriche $(x_n)_n$ con $x_n = a^n\, x_0$. Il fattore a presente nel modello indica un fattore di crescita quando $a > 1$, mentre se $0 < a < 1$ si ottiene una decrescita della popolazione. Il caso $a = 1$ restituisce una popolazione la cui numerosità rimane costante nel tempo.

Questo modello è il più semplice che si possa considerare, ma ha diversi difetti. Ad esempio, in presenza di un qualsiasi fattore di crescita $a > 1$ la popolazione è destinata a crescere incontrollatamente, cosa irrealizzabile se lo spazio a disposizione della popolazione è limitato (si pensi a una coltura di batteri in un laboratorio, o alla popolazione di una certa specie sulla Terra). Al fine di sistemare questo difetto è stato proposto il seguente modello, che dal punto di vista matematico, nonostante la sua semplicità estetica, presenta innumerevoli peculiarità.

♣ **Il modello logistico di Verhulst.** La crescita della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa, ma esiste una capacità ambientale K, che è il numero massimo di individui che possono prosperare nell'ambiente.

$$x_{n+1} = f(x_n),\ \text{con}\ f(x) = rx(1 - \tfrac{x}{K})$$

Il modello presenta sempre due equilibri: i valori 0 ed $E = \frac{r-1}{r}\ K$ (se $r \neq 0$). Come si comportano le soluzioni vicino agli equilibri? Gli equilibri sono stabili o instabili?

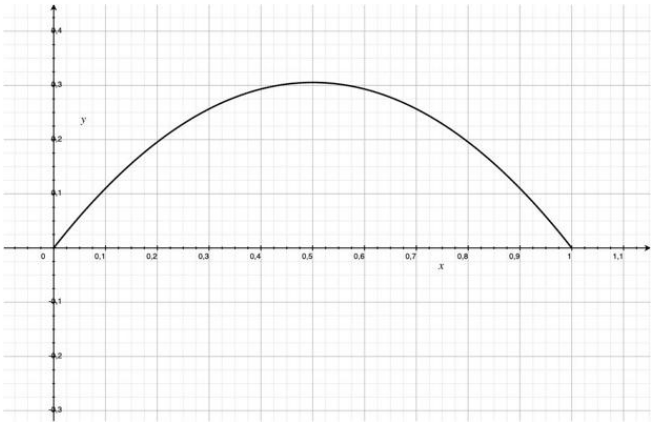

Figura 6. Grafico per la mappa logistica.

Si ponga per semplicità $K = 1$, ottenendo l'equazione $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$; con $r \in [0,4]$.

In questo caso si ha $E = \frac{r-1}{r}$ per $r \neq 0$. Se $x_n > K = 1$ allora il valore successivo soddisfa la relazione $x_{n+1} < 0$, che non ha significato in quanto si stanno cercando soluzioni $(x_n)_n$ che descrivono popolazioni, quindi costituite da valori positivi.

Poiché il valore massimo della funzione $x \mapsto rx(1-x)$ è $\frac{r}{4}$, imponendo la condizione $0 \leq r \leq 4$ nell'equazione precedente si ha la garanzia che, dato un qualsiasi valore $x_n \in [0,1]$, varrà sempre $x_{n+1} \in [0,1]$. Le soluzioni $(x_n)_n$ del modello saranno quindi costituite da valori non negativi scegliendo un valore iniziale $x_0 \in [0,1]$.

Per quanto appena detto, nello studio degli equilibri e della loro stabilità, sarà posta attenzione ai valori $x \in [0,1]$.

Se $r = 0$ la dinamica è banale.

Se $0 < r < 1$, si ha $rx(1-x) < x$ per ogni $x \in]0,1[$, quindi 0 è l'unico equilibrio da considerare (infatti l'equilibrio $E = r - 1 < 0$ non ha per noi significato). In questo caso 0 è un equilibrio stabile e ogni orbita converge a zero. La popolazione è destinata a estinguersi qualunque sia il valore iniziale. Si noti che questo mima quanto accade nel *modello di Malthus* nel caso $0 < a < 1$.

Se $1 < r < 3$, il punto 0 è un equilibrio instabile mentre il punto $E = \frac{r-1}{r}$ è un equilibrio stabile.

Se $3 < r \leq 4$ la situazione è complicata. Gli equilibri 0 e $\frac{r-1}{r}$ sono entrambi instabili. Possono essere presenti cicli di ordine k per qualsiasi $k = 2^j, j \in \mathbb{N}$. Segnaliamo che quest'ultimo caso è molto interessante dal punto di vista matematico in quanto possiamo individuare in esso un comportamento "caotico" (nel senso matematico del termine). I valori di r che determinano una variazione nella dinamica del sistema sono detti "punti di biforcazione". Per un'introduzione al concetto matematico di caos suggeriamo il libro *Chaos in Dynamical Systems*[10].

♣ **Altri modelli non lineari.** Il seguente modello, noto come *modello di Beverton-Holt*, tiene conto della competizione per l'utilizzo di risorse comuni, decrescente in maniera non lineare con la densità degli individui.

$$x_{n+1} = f(x_n), \text{ con } f(x) = \frac{r}{1 + \frac{r-1}{E}x}\, x$$

Questo modello ha trovato applicazioni nello studio dei bacini di pesca. In esso la popolazione tende a raggiungere un equilibrio che ne garantisce la sopravvivenza. Anche questo sistema presenta gli

[10] Cfr. OTT 2002.

equilibri 0 ed E. Per $r > 1$, l'equilibrio 0 è instabile, mentre l'equilibrio E è sempre stabile. Inoltre questo modello ha il pregio di non ammettere soluzioni illimitate in quanto l'insieme immagine della funzione f è limitato.

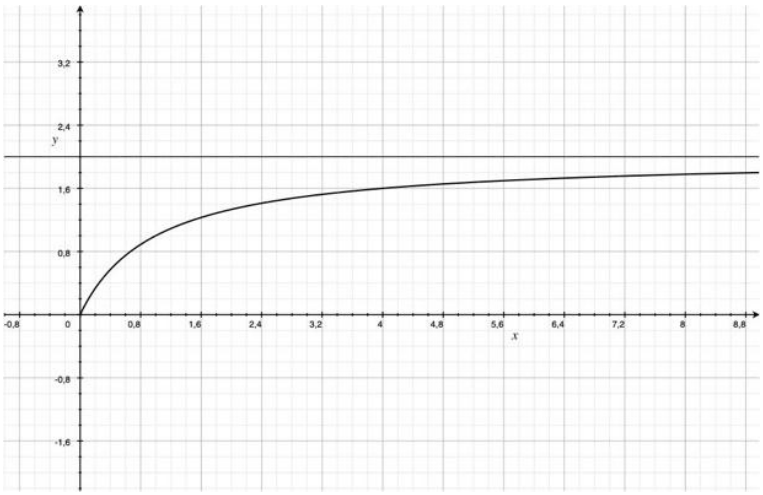

Figura 7. Grafico per il modello di Beverton-Holt.

Il seguente modello è noto come *modello di Ricker*.

$$x_{n+1} = f(x_n), \text{ con } f(x) = e^{\left(r\left(1-\frac{x}{E}\right)\right)}x$$

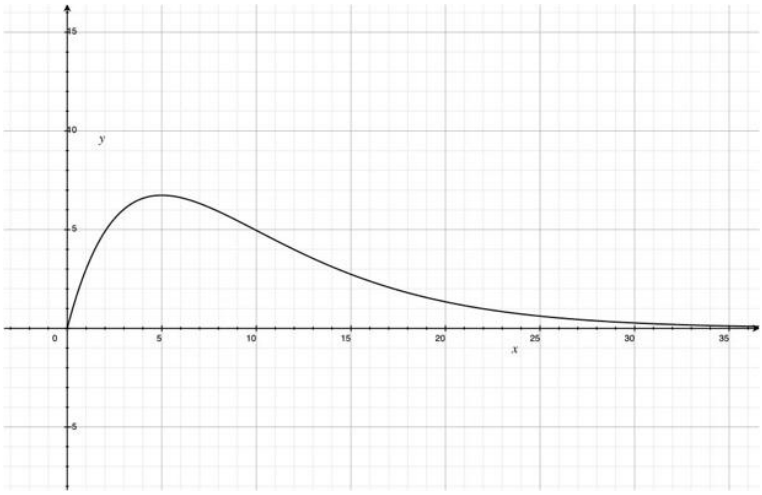

Figura 8. Grafico per il modello di Ricker.

Questo modello è più realistico del precedente. In particolare risolve il problema, presente nel modello logistico, della possibile presenza, per valori $r > 4$, di soluzioni che assumono valori negativi. Come per il modello logistico, anche questo modello presenta una certa ricchezza per quanto riguarda lo studio degli equilibri e della loro stabilità.

♣ 8. SISTEMI DINAMICI IN DUE VARIABILI

Questa sezione ha lo scopo di illustrare brevemente alcuni esempi di sistemi in due variabili. Il modello tipo è quello che descrive un ambiente in cui sono presenti due specie che in qualche modo competono tra loro per la sopravvivenza: una specie di prede e una specie di predatori (che si cibano delle prede), oppure due specie che sottraggono risorse una all'altra.

Un sistema dinamico in due variabili viene spesso rappresentato in un diagramma dove la variabile in ascissa rappresenta una specie (ad esempio le prede) e in ordinata la seconda specie (ad esempio i predatori). Un punto (x, y) del diagramma pertanto individua uno "stato del sistema" in cui coesistono x prede e y predatori.

Il primo esempio propone un problema di tipo lineare (cioè ogni variabile appare moltiplicata solo per una costante). Quelli successivi sono tipici dei problemi preda-predatore e sono non lineari, in quanto le variabili sono moltiplicate tra loro.

Romeo e Giulietta[11]**.** Consideriamo il seguente problema lineare

$$\begin{cases} R_{n+1} = a_R\, R_n + p_R\, J_n \\ J_{n+1} = a_J\, J_n + p_J\, R_n \end{cases}$$

Questo sistema lineare descrive l'affetto R che Romeo prova nei confronti di Giulietta, e l'affetto J che Giulietta prova nei confronti di Romeo. $R_n > 0$ significa che Romeo è attratto da Giulietta (Romeo "ama" Giulietta), $R_n < 0$ significa che Romeo "odia" Giulietta, e similmente per J_n. I parametri reali a_R, p_R, a_J, p_J indicano come l'affetto di ciascuno dei due protagonisti viene incrementato o diminuito in dipendenza del valore di R e J. Non sempre le manifestazioni d'affetto dell'uno aumentano il sentimento nell'altro. La situazione più interessante dal punto di vista dinamico (e pericolosa dal punto di vista pratico) si ottiene quando $p_R < 0$ (l'amore che Romeo prova per Giulietta diminuisce se Giulietta ama troppo Romeo).

Consideriamo ora un modello che studia l'evoluzione di due specie in competizione.

Erba e Pecore. In questo modello sono presenti due variabili, una rappresenta le prede (qui l'erba E), una i predatori (qui le pecore P).

$$\begin{cases} E_{n+1} = a_E\, E_n + p_E\, E_n P_n \\ P_{n+1} = a_P\, P_n + p_P\, E_n P_n \end{cases}$$

dove sceglieremo $a_E > 1 > a_P > 0$ e $p_E < 0 < p_P$.

[11] Cfr. DE VRIES *et al.* 2006.

Nel modello discreto, a seconda della scelta dei parametri, le orbite possono girare intorno all'equilibrio, ma non sono periodiche, a differenza del modello continuo.

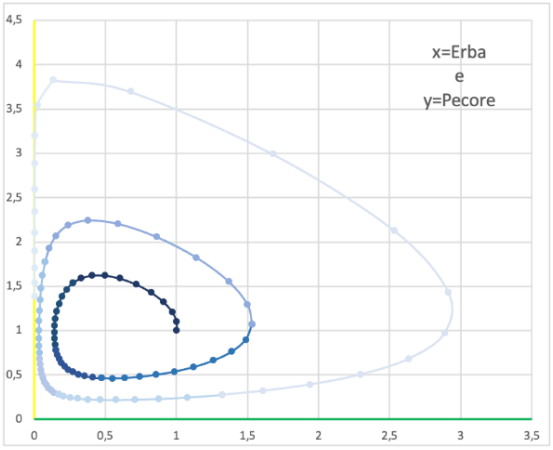

Figura 9. Modello discreto preda-predatore (Erba e Pecore).

♣ La versione continua del problema è il *sistema di equazioni differenziali non lineari di Lotka-Volterra*:

$$\begin{cases} x'(t) = a_x\, x(t) + p_x\, x(t)\, y(t) \\ y'(t) = a_y\, y(t) + p_y\, x(t)\, y(t) \end{cases}$$

Qui $x = x(t)$ rappresenta la quantità di prede al tempo t, $y = y(t)$ la quantità di predatori. $a_x > 0$ è un parametro di fertilità, $p_x < 0$ il parametro legato al contatto con i predatori, che determina una diminuzione della popolazione $a_y < 0, p_y > 0$. Questo sistema è stato proposto indipendentemente da Vito Volterra (1860-1940), fisico matematico, nonché senatore del Regno d'Italia, e da Alfred Lotka (1880-1949), matematico, statistico e chimico-fisico statunitense, nato a Leopoli, allora Austria-Ungheria, oggi Ucraina. Per approfondimento consigliamo la biografia di Vito Volterra[12].

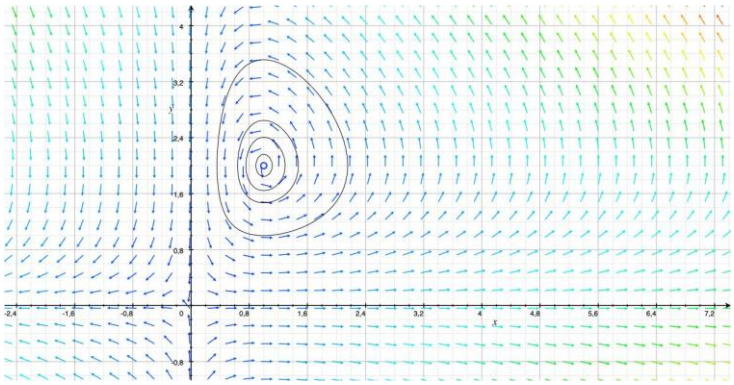

Figura 10. Modello continuo preda-predatore (Lotka-Volterra).

[12] Cfr. GUERRAGGIO, PAOLONI 2013.

Il grafico mostra le linee del campo che definisce il sistema e alcune orbite periodiche intorno all'equilibrio stabile, per le equazioni di Lotka-Volterra.

La competizione. Consideriamo il modello

$$\begin{cases} A_{n+1} = a_A A_n + p_A A_n B_n \\ B_{n+1} = a_B B_n + p_B A_n B_n \end{cases}$$

dove sceglieremo $a_A, a_B > 1$ *e* $p_A, p_B < 0$.

La differenza con il modello precedente risiede nel valore dei parametri che lo descrivono. Nel primo caso la richiesta $a_E > 1 > a_P > 0$ implica che l'erba ha un fattore di crescita intrinseco indipendente dalla presenza delle pecore (l'erba cresce grazie ad acqua, sole, sali minerali... grazie a elementi esterni non presenti nel modello), mentre le pecore in assenza di erba hanno un fattore di decrescita (in assenza di cibo ci si attende più pecore che muoiono, rispetto a quelle che nascono). Nel secondo modello invece si richiede $a_A, a_B > 1$. In questo caso le due specie crescono in modo naturale (si immagini il caso di due specie di erbe infestanti).

I parametri $p_A, p_B < 0$ limitano la crescita delle specie: la presenza di una specie limita la crescita dell'altra. Nel caso del modello sopra invece la richiesta $p_E < 0 < p_P$ comporta una riduzione della crescita dell'erba a causa della presenza delle pecore, ma un aumento del numero di pecore grazie alla presenza dell'erba.

La volontà di includere più precisione nei modelli porta a equazioni più complesse il cui studio è meno agevole. I modelli qui presentati sono molto semplici e sono il punto di partenza per studi più approfonditi nel campo dell'analisi matematica. Si pensi che questi modelli considerano solo la distribuzione nel tempo della popolazione ma non la sua distribuzione spaziale: in questi modelli si considera una popolazione uniformemente distribuita nello spazio. L'introduzione di questa piccola correzione al modello porta a un problema completamente diverso dal punto di vista teorico la cui risoluzione pratica necessita dell'ausilio di calcolatori.

9. CONCLUSIONI

Tra tutti i corsi proposti dall'Università di Trieste nell'ambito del progetto "Orientamento attivo nella transizione scuola-università", il nostro percorso formativo non è stato tra quelli "più popolari". È possibile che l'idea di partecipare a un'attività extracurricolare incentrata sulla matematica abbia suscitato qualche resistenza da parte dei docenti, inducendoli a preferire proposte legate ad ambiti percepiti come più "accessibili" o

familiari, quali l'ambiente, l'economia o le scienze sociali. Tuttavia, i docenti e gli studenti che vi hanno preso parte hanno generalmente espresso valutazioni molto positive. I questionari di gradimento somministrati al termine del progetto confermano l'interesse suscitato dalle attività proposte e la soddisfazione per il percorso svolto.
Alcune criticità sono emerse in fase di svolgimento, in particolare legate all'uso del computer. In alcuni casi si è sopravalutata la padronanza degli studenti nell'utilizzo degli strumenti informatici, e la necessaria spiegazione dei comandi del foglio di calcolo si è rivelata lunga e poco coinvolgente. In altri casi, per evitare difficoltà e ottimizzare i tempi, si è preferito predisporre in anticipo i file da utilizzare, limitando l'interazione diretta degli studenti con il software.
Sono state particolarmente apprezzate le attività dal carattere più ludico e laboratoriale, soprattutto quelle che prevedevano l'uso di carta e matita o il coinvolgimento attivo attraverso giochi e discussioni. Queste proposte hanno stimolato l'interesse e la partecipazione, rendendo più efficace e accessibile anche la trattazione di concetti matematici non elementari.
Nel complesso, l'esperienza ha mostrato come la matematica possa rivelarsi uno strumento efficace per esplorare tematiche di attualità come la sostenibilità, purché presentata in modo dinamico, concreto e calibrato sulle competenze reali degli studenti.

RINGRAZIAMENTI

Ringraziamo sentitamente i revisori anonimi che hanno letto con grande attenzione il manoscritto e hanno offerto numerosi suggerimenti utili al miglioramento del lavoro. Desideriamo altresì ringraziare il prof. Alberto D'Onofrio per alcuni suggerimenti bibliografici e alcune chiacchierate sui sistemi dinamici.

BIBLIOGRAFIA

COMINCIOLI V.
2004, *Modelli matematici, elementi introduttivi,* Pavia, Università degli Studi di Pavia, liberamente scaricabile dal sito web: <https://sites.unimi.it/zampieri/biotec/annocorrente/comincioli.pdf>.

DE VRIES G., HILLEN T., LEWIS M., MÜLLER J., SCHÖNFISCH B.
2006, *A Course in Mathematical Biology, Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, SIAM.

GAETA G.
2007, *Modelli matematici in Biologia,* Milano, Springer Italia.

GAUSE G. F.
2019, *The Struggle for Existence: A Classic of Mathematical Biology and Ecology,* New York, Dover Publications.

GUERRAGGIO A., PAOLONI G.
2013, *Vito Volterra*, Berlin, Springer.

MALTHUS T. R.
1798, *An Essay on the Principle of the Population as it Affects the Future Improvement of Society*, London, J. Johnson.

MEADOWS DO., MEADOWS DE., RANDERS J., BEHRENS III W. W.
1972, *Il Rapporto sui limiti dello sviluppo*, Roma, Mondadori.
1993, *Oltre i limiti dello sviluppo*, Milano, Il Saggiatore.

OTT E.
2002, *Chaos in Dynamical Systems*, Second edition, Cambridge University Press.

PECCEI A.
1971, «Un modello matematico per la previsione del futuro del mondo», *Futuribili*, 33, pp. 5-15.

THEN V., SCHOBER C., RAUSCHER O., KEHL K.
2017, *Social Return on Investment Analysis Measuring the Impact of Social Investment, Palgrave Studies in Impact Finance*, Edited by Mario La Torre, Cham, Palgrave Macmillan.

WORLD COMMISSION ON ENVIRONMENT AND DEVELOPMENT
1987, *Our Common Future*, Oxford, Oxford University Press.