EUT EDIZIONI UNIVERSITÀ DI TRIESTE

Bollettino della ASSOCIAZIONE ITALIANA di CARTOGRAFIA **2022 (174), 4–19**

ISSN 2282-572X (online) ISSN 0044-9733 (print)
http://www.openstarts.units.it/dspace/handle/10077/9933

DOI: 10.13137/2282-572X/34022

Cartografando. Protagonisti e fatti dal mondo delle mappe. Episodio I. Johann Heinrich Lambert

Mapping. Players and facts from the world of maps. Episode I. Johann Heinrich Lambert

Andrea Favretto

Università di Trieste, afavretto@units.it

Riassunto

Inizia con il presente una serie di contributi su alcuni grandi cartografi del passato. Il primo episodio è dedicato a Johann Heinrich Lambert. Viene presentato il quadro storico di riferimento ovvero i principali fatti storici dei territori nei quali il cartografo visse; segue una breve nota biografica, che descrive l'uomo nel suo tempo, la sua formazione culturale e le condizioni nelle quali egli lavorò; infine, viene descritta l'opera cartografica dell'eclettico scienziato, ricordando gli attuali campi di applicazione delle sue proiezioni.

Parole chiave

Lambert, Accademia delle Scienze di Berlino, Federico II il Grande, Proiezioni di Lambert, Prussia.

Abstract

This is the first of a series of papers about some great cartographers of the past. The paper deals about Johann Heinrich Lambert. Lambert historical background is presented with particular regard to the historical facts of the areas where he lived. A brief biographical note follows, in which his cultural background and his working conditions are shown. At last, the seven Lambert map projections are introduced, with reference to their current applications.

Keywords

Lambert, Berlin Academy of Sciences, Frederic II the Great, Lambert projections, Prussia.

Introduzione

Inizia, con questo lavoro dedicato a Joahann Heinrich Lambert, una serie di articoli tematicamente legati, che appariranno periodicamente sul Bollettino.

Il tema conduttore è quello di presentare la vita e le opere di alcuni personaggi importanti per la cartografia. Per ogni Autore saranno riassunti i principali fatti della vita, la formazione culturale e verrà anche fornita una breve contestualizzazione storica; si pensa che la conoscenza della biografia sia molto importante per capire come l'uomo sia divenuto scienziato; sapere la formazione culturale di ciascun Autore e le circostanze nelle quali questa sia stata acquisita è fondamentale per capire appieno la produzione scientifica ed apprezzarne il valore.

Per quanto riguarda la scelta di personaggi, si cercherà di evitare quelli maggiormente trattati in letteratura, per non creare doppioni (o più) di studi diffusi e facilmente reperibili. Si andranno a considerare grandi cartografi del passato che, per un motivo o per l'altro, siano stati sottovalutati e non abbiano avuto il giusto riconoscimento per il loro lavoro o, semplicemente, siano stati dimenticati perché la proiezione da essi sviluppata è stata rimaneggiata da un successivo Autore, al quale viene comunemente attribuita. Infine, si prediligeranno i cartografi con un background culturale matematico, che hanno utilizzato non solo la prospettiva per creare le loro proiezioni ma anche il calcolo. Molti di questi non furono dei cartografi specializzati ma fini matematici, che colsero nella cartografia una ghiotta occasione per applicare tale scienza a casi concreti.

Come premesso, in questo primo appuntamento verrà approfondita la figura e la produzione cartografica di Lambert, uno scienziato vissuto nel secolo dei lumi in Europa centrale, importante per i suoi contributi in diverse discipline, tra le quali anche la cartografia. Lambert è il tipico esempio di come a volte la disciplina cartografica sia irriconoscente verso i suoi cultori. Egli sviluppò ben sette nuove proiezioni, alcune delle quali, riprese da illustri successori, sono oggi ampiamente utilizzate ma sono attribuite ad altri. Prendiamo ad esempio UTM (Universal Transverse Mercator), forse la proiezione più diffusa al mondo. Abbiamo imparato che essa viene attribuita a Mercatore ma si tratta della proiezione conforme di Gauss, che a sua volta aveva trasformato una proiezione sviluppata da Lambert sulla base (finalmente) di quella di Mercatore. Potremmo osservare che i cartografi siano temporalmente molto "collaborativi" gli uni con gli altri ma poco propensi a citarsi reciprocamente. Un altro esempio è la proiezione cilindrica equivalente di Lambert, rielaborata da Gall un secolo più tardi e da lui denominata Ortografica, plagiata infine un secolo dopo da Peters ed oggi comunemente a lui attribuita (si veda: Favretto, 2021 e la bibliografia in esso citata). Come si vedrà, Lambert fu un brillante scienziato con un carattere piuttosto spigoloso, che forse non lo aiutò in vita a costruirsi una rete di collaborazioni ma anche di diffusione delle sue opere.

L'articolo è strutturato con un format che sarà ripetuto nei lavori che seguiranno: dapprima viene presentato il quadro storico di riferimento ovvero i principali fatti storici dei territori nei quali il cartografo visse; segue una breve nota biografica, che descrive l'uomo nel suo tempo, la sua formazione culturale e le condizioni nelle quali lavorò; infine, viene approfondita l'opera dell'eclettico scienziato, ricordando gli attuali campi di applicazione delle sue proiezioni. Come si vedrà, in questo articolo non sono presenti le conclusioni: queste appariranno alla fine dell'intero ciclo degli scritti.

Il quadro storico di riferimento

Come si riporta nel successivo paragrafo biografico, Lambert visse e lavorò principalmente nella sua città natale (Mulhausen), a Coira (Chur - ove trascorse un lungo e culturalmente fecondo periodo della sua giovinezza) e, dal 1764 fino alla morte (1777), a Berlino, presso l'Accademia delle Scienze. Fece anche diversi viaggi, dapprima per il suo lavoro di tutore e poi per i suoi svariati interessi scientifici, che lo portarono in diverse città dell'Europa centrale, fra cui Gottinga, Utrecht e Le Hague ma anche a Parigi, Nizza, Torino e Milano. Come si vedrà, Berlino costituì per Lambert una meta professionale molto importante, dato il grande prestigio che l'ammissione a questa Accademia significava (e la conseguente tranquillità economica che tale ammissione comportava). Si desidera pertanto premettere alla biografia un breve quadro di riferimento storico, relativo alla Prussia ed ai monarchi/mecenati che, oltre

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

alla politica, dedicarono molte risorse al sostegno della cultura, per mezzo della creazione e del potenziamento delle Accademie, istituzioni dedicate alla ricerca scientifica (Ferrari, 2003).

Le vicende politico/militari del XVIII secolo in Europa sono molto intricate e un loro approfondimento andrebbe oltre lo scopo di questa nota. Il mondo tedesco di quel periodo era caratterizzato da due realtà militari, apertamente ostili fra di loro (Austria e Prussia) e da un certo numero di stati indipendenti, che però aderivano ad una generica entità politica, denominata Sacro Romano Impero.

La nascita della Prussia come stato moderno coincise con l'inizio del XVIII secolo (1701), con l'incoronazione di re Federico I ed il riconoscimento dell'omonimo Regno, formato dalle Regioni della Prussia orientale e di Brandeburgo (non contigue fino al 1772). Come è noto, il 1700, anche denominato "il secolo dei Lumi", fu un secolo in cui ebbero grande importanza la scienza e gli scienziati, portatori del culto della ragione, lo strumento principe (insieme all'esperienza sensibile), per chiarire e accertare la verità di opinioni e nozioni. Le diverse Accademie scientifiche che sorsero in quest'epoca furono per l'appunto una diretta conseguenza di una tale propensione.

L'Accademia delle Scienze di Berlino fu fondata il 10 maggio 1700 dall'allora principe Federico I (diverrà monarca l'anno successivo), su suggerimento di Gottfried W. Leibniz (Benedetti, 2008). Il monarca successivo, Federico Guglielmo I, asceso al trono nel 1713 e passato alla storia come il "Re sergente", spese invece gran parte delle risorse del Regno per potenziarne l'esercito, che aumentò in consistenza numerica ma soprattutto fu puntigliosamente addestrato ed armato, facendo in tal modo divenire la Prussia un'efficientissima macchina da guerra, in grado di competere con gli altri attori dello scacchiere geopolitico europeo del tempo[1]. Alla morte di Federico Guglielmo (1740), suo figlio Federico II ascese a sua volta al trono, ottenendo come eredità un esercito di non trascurabile forza. Federico II aveva un carattere completamente diverso dal padre (con il quale aveva avuto non pochi dissapori): ancora da principe aveva ottenuto la fama di futuro "Re filosofo", per i suoi stretti rapporti con numerosi intellettuali del periodo e per le sue frequentazioni degli ambienti culturali europei (si veda: Carlyle, 2017). Re Federico II trasformò e rifondò l'Accademia a Berlino, con il nome di "Academie Royale des Sciences" e le diede un carattere pluridisciplinare, "universale", chiamando presso di essa le migliori menti europee del XVIII secolo (anche lo stesso Lambert, come si vedrà nel prossimo paragrafo) e facendone in tal modo uno dei poli europei di maggiore importanza per ciò che riguarda la ricerca scientifica.

Federico II fu anche un re interessato alla guerra, un geniale stratega[2] (da qui l'appellativo "il Grande"); sotto la sua guida la Prussia risultò vittoriosa in diverse decisive battaglie, nella "Guerra di successione austriaca" e nella successiva "Guerra dei sette anni", estendendo così i territori prussiani e annettendo la Slesia a spese degli austriaci (si veda, per approfondire: Dwyer, 2014).

Nota bio/bibliografica[3]

Johann Heinrich Lambert fu un uomo di grande intelligenza ed enorme erudizione, anche se non tutti i suoi biografi sono concordi nel considerarlo un vero e proprio genio.[4] Ebbe un carattere particolare, spigoloso, che

1 A tal riguardo è celebre la frase che il Marchese di Mirabeau inserì nelle sue note inviate da Berlino al Governo francese: "la Prussia non è uno Stato che possiede un esercito ma un esercito che possiede uno Stato" (cfr.: Barbero, 2007, pag. 54).

2 Per quanto riguarda la sua fama di stratega, è noto che Napoleone visitò la sua tomba a Posdam e ordinò ai suoi ufficiali di levarsi i cappelli perchè, se quell'uomo fosse stato ancora vivo, i francesi non sarebbero arrivati li.

3 Una cospicua parte dei testi di Lambert che vengono citati nella presente nota provengono da: "Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Collected Works - Sämtliche Werke Online" (http://www.kuttaka.org/~JHL/JHLHistory.html). Il sito Web è stato realizzato da Maarten Bullynck, nell'ambito di un progetto di ricerca dedicato allo scienziato, finanziato dalla Fondazione Alexander-von-Humboldt (https://www.humboldt-foundation.de/en/). Nel sito, l'opera di Lambert è consultabile per via cronologica, tematica e per parole chiave (titoli delle opere). Molti dei lavori sono scaricabili in formato pdf.

4 Gray e Tilling , in occasione del bicentenario della sua morte – 1977, scrivevano di lui: "He was no genius, but a man of great intelligence and imagination with occasional sparks of brilliance" (1978, pag. 14). Maurer, nella sua dettagliata biografia dedicata allo scienziato, esordisce invece con: "Genius is not confined to any particular social class, and it makes its own way in the world even under the most unfavorable circumstances" (1931, pag. 69).

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

sicuramente non lo aiutò nelle relazioni interpersonali e nella vita sociale. A tal riguardo Maurer (1931), cita il suo primo incontro a Berlino con Federico il Grande, nel quale Lambert si dimostrò per niente umile e decisamente poco diplomatico con il monarca, nel professarsi un autodidatta esperto in tutte le scienze e paragonando sé stesso niente meno che a Pascal.

Johann Heinrich ebbe umili natali nell'allora città svizzera di Mulhausen (Alsazia), il 26 agosto 1728. Fu il maggiore dei sette figli di un sarto, che gli fece abbandonare la scuola all'età di dodici anni per avere un aiuto a bottega. Il lavoro sartoriale non impedì però al giovane Lambert di coltivare i suoi interessi culturali, posti in essere in condizioni decisamente disagiate, in orari notturni e addirittura alla luce della luna o delle candele (data la carenza di olio per le lampade in casa). I suoi studi notturni furono basati dapprima su un unico testo di matematica ("a book on the science of calculation" – Maurer, op. cit., pag. 69), regalato a Lambert da uno dei clienti della sartoria paterna. Successivamente, la biblioteca del giovane apprendista sarto raddoppiò il numero dei suoi testi, con un secondo volume, dedicato stavolta ad una disciplina che avrebbe fortemente caratterizzato la produzione scientifica del futuro uomo di scienza: la geometria. Lentamente, Lambert si fece la fama di bambino prodigio e ciò gli valse la fornitura di testi aggiuntivi su varie discipline ed il permesso di accedere alla biblioteca privata del Professor Iselin (di cui era il segretario scientifico), nella vicina Basilea (1745). Tutto ciò fece di lui un discreto (se si considera l'ancor giovane età), conoscitore di filosofia, matematica, algebra, geometria e meccanica.

Un punto di svolta per la formazione del futuro scienziato fu, nel 1748, l'occasione di diventare tutore dei nipoti del Conte Peter von Salis, nella città di Coira (Chur). Oltre all'insegnamento di catechismo, lingue (Lambert già parlava e scriveva all'epoca latino, greco, tedesco, francese ed italiano), geometria, architettura militare, geografia e storia, il tutore aveva il compito di accompagnare i pupilli nei loro viaggi d'istruzione ("bildungsreise"), attraverso l'Europa. La possibilità di consultare i libri della casa del Conte diede a Lambert il modo di approfondire ed ampliare le sue conoscenze in fisica, meteorologia, matematica, astronomia, meccanica e retorica, oltre che perfezionare il suo già cospicuo bagaglio linguistico.

Iniziò quindi un periodo particolarmente fecondo per Lambert, durante il quale pose le basi per diverse sue future pubblicazioni, fra cui le "Cosmologishe Briefeuber die Einrichtung des Weltbaues", dedicata alla via lattea, forse la sua opera più nota nella Germania del tempo (il lavoro fu pubblicato nel 1761); nel 1752 iniziò a tenere un diario delle sue principali attività e delle sue ricerche scientifiche (denominato "Monatsbuch- Lambert, 1915"), che continuò a scrivere fino alla sua morte; significativo per i suoi futuri studi cartografici fu il rilievo sul campo del territorio di Coira, nel 1753; inoltre, di particolare rilevanza per il giovane Lambert, fu l'ammissione alla Società di Matematica e Fisica di Basilea, nel 1754.

I viaggi con i suoi pupilli lo portarono in molte stimolanti località, fra cui Gottinga (1756), che però dovette presto lasciare (luglio 1757), in seguito all'occupazione francese, durante la Guerra dei Sette anni; tale circostanza gli diede però l'occasione di divenire un componente epistolare della locale società scientifica; altre mete dei suoi viaggi furono diverse città olandesi, fra cui Utrecht e l'Aia (the Hague), ove Lambert trovò l'editore del suo primo libro, un lavoro sulla luce e le modalità del suo passaggio attraverso vari supporti (Lambert, 1758). Fu anche a Parigi, Nizza, Torino e Milano.

Nel 1759 abbandonò il suo servizio di tutore presso la famiglia von Salis a Coira (Dello Preite, 1979), passò quindi un breve periodo a Zurigo, ove pubblicò nel 1759: "Die freie Perspektive", la prima edizione di un trattato sulla prospettiva e su come rigorose regole e strumenti potessero trasformarla in un'arte meccanica o addirittura in una scienza. Perennemente alla ricerca di una collocazione accademica che gli garantisse una certa stabilità economica (e quindi il tempo per dedicarsi alla ricerca scientifica), Lambert condusse in questo periodo (dal 1759 al 1764), una frenetica vita di studio e ricerca, sempre viaggiando e stimolando sé stesso me-

Il lavoro di Maurer cita come principale fonte dei molti particolari in esso contenuti un libro a cura del Professor D. Huber di Basilea, pubblicato in occasione del centenario della nascita dello scienziato. I fatti della vita di Lambert sono contenuti nel saggio scritto dal Pastore Graf di Mulhausen e presente nel libro celebrativo del 1828. Basso ricorda infine che Lambert era in grado di leggere direttamente Euclide e lo definisce "oltre che filosofo, anche un genio matematico e uno scienziato" (1999, pag. 10).

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

diante la conoscenza di altri scienziati. Fu membro fondatore dell'Accademia di Scienze bavarese a Monaco, dal 1759 al 1763. Ad Augusta conobbe Georg Friedrich Brander, un costruttore di strumenti scientifici molto noto nell'Europa del tempo (fra le opere di quest'ultimo, si veda ad esempio il microscopio composto, conservato al Museo Galileo di Firenze - https://catalogo.museogalileo.it/oggetto/MicroscopioComposto_n03.html), con il quale tenne per lungo tempo una proficua corrispondenza (si veda il "Band 3" del "Deutscher gelehrter Briefwechsel", pubblicato postumo a cura di Johann III Bernoulli fra il 1781 ed il 1787). Nel 1760 pubblicò a Basilea il suo lavoro sulla fotometria ("Photometria sive de mensure et gradibus luminis colorum et umbra"), nel quale venne proposto un metodo per misurare l'intensità della luce; l'anno successivo fu la volta del già citato "Cosmologishe Briefeuber". Fra le varie attività del periodo va ricordata, per l'attinenza con cartografia, la partecipazione, come geometra, al rilievo per l'aggiornamento del confine fra le Regioni di Milano e Coira; fu anche a Lipsia, ove pubblicò i due volumi del "Neues Organon" (1764), il suo principale lavoro filosofico, nel quale sono strettamente legate filosofia e geometria[5]; l'opera inizia emblematicamente con la frase: "Ho scritto in primo luogo per me stesso", che molto suggerisce sullo spigoloso carattere dello scienziato.

Finalmente, nel 1764, Lambert fu ammesso all'Accademia delle Scienze di Berlino, su intercessione dei matematici e fisici Johann Georg Sulzer ed Eulero, già membri della stessa Accademia. Fu indubbiamente una svolta nella vita dello scienziato, il coronamento di un sogno professionale ed il mezzo per condurre le sue ricerche scientifiche e pubblicarne i risultati. Come già accennato, il suo carattere difficile e i suoi modi stravaganti non lo favorirono, da principio. I suoi biografi citano a tal riguardo il suo primo incontro con Federico il Grande e la scarsa umiltà dello scienziato nel presentarsi al monarca. Federico, tuttavia, cambiò presto parere sullo scienziato, rilevando che: "In judging this man one should consider only the breadth of his vision and not the minor details" (Maurer, 1931, pag. 71). L'estrema rettitudine e lo spessore scientifico dell'uomo furono presto apprezzate, sia all'interno dell'Accademia (fu nominato membro della commissione economica, insieme a Sulzer ed Eulero), sia fra i non moltissimi colleghi suoi amici, con i quali condivideva gli interessi scientifici. Lambert era infatti particolarmente riservato per ciò che riguardava le sue ricerche e si teneva a debita distanza da polemiche con altri scienziati, che magari discordavano dalle sue idee. Tutto ciò fece di lui un isolato, seppur profondamente apprezzato dai pochi che lo conoscevano veramente, come uomo e studioso. Si può a tal riguardo citare la grande stima e il riconoscimento che gli manifestò Kant (dello Preite, 1979), con il quale tenne una corrispondenza epistolare dal 1765 (si veda: Lambert, Band 1, 1781-1787; Kant, 1999; Griffing, 1892). Riguardo al rapporto culturale con Kant e all'alta opinione di quest'ultimo sulle sue osservazioni, Maurer (1931, pag. 72), cita questa frase del celebre filosofo tedesco: "If it is not possible to win his assent it is impossible to base this science on incontestable premises".

A Berlino, che non lascerà fino alla sua morte, avvenuta precocemente il 25 settembre 1777, Lambert fu all'apogeo della sua attività scientifica, che potremmo addirittura definire frenetica per quantità e qualità degli scritti ma soprattutto per la grande varietà dei temi trattati.

In un mondo ove le scienze sono talmente specializzate e permeate di tecnologia quale l'attuale, la figura di uno scienziato eclettico come Lambert può apparire strana, se non addirittura ingenua o superficiale, soprattutto agli occhi di un moderno ricercatore, talmente specializzato nel suo campo da non essere più in grado di collegare conoscenze e risultati di altre scienze, in un'ottica di ampio respiro. Nulla può essere più sbagliato nell'opinione di chi scrive: Lambert fu un acuto genio matematico, che cercò di applicare la logica di questa disciplina alle molte altre cui si accostava, per la sua irrefrenabile sete di conoscenza. In tal senso, Berlino fu un ambiente particolarmente fecondo, anche e soprattutto per la possibilità di interscambi culturali con altri scienziati, fra i quali i già citati Eulero e Bernoulli, il matematico Lagrange (che deriverà la sua omonima proiezione cartografica proprio dal lavoro di Lambert), l'astronomo Bode (che Lambert inviterà nell'Accademia di Berlino con il ruolo di "calcolatore" per la pro-

5 Fare filosofia per Lambert significava comporre concetti composti a partire da concetti semplici, quasi fossero punti e linee perché: "come in geometria occorre qui premettere assiomi e postulati che stabiliscano una sintassi dei concetti semplici" (Basso, 1999, pag. 73).

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

duzione delle prime Effemeridi in lingua tedesca – le "Astronomisches Jahrbuch"[6]).

Specificare e approfondire l'intero corpo delle pubblicazioni di Lambert esula dallo scopo di questo lavoro. Oltre ai temi citati egli si occupò e scrisse su logica, fisica sperimentale, teoria degli errori, magnetismo; fece osservazioni e ricerche barometriche ed astronomiche; interessato al problema di dimostrare una generica legge fisica, capì l'importanza di trasformare linearmente osservazioni empiriche e propose un suo metodo di regressione lineare (si veda: Hulliger, 2013); addirittura progettò una macchina calcolatrice.

In questa sede si farà cenno agli studi legati alla matematica ed alla geometria ellittica ed iperbolica. Tali studi sono strettamente connessi, se non propedeutici, al contributo di Lambert alla cartografia; in particolare, ci si riferisce agli scritti di Lambert su gli "Elementi" di Euclide[7].

6 Bode J. E., Lambert J. H. (editors - 1776 – 1829). Astronomisches Jahrbuch für die Jahre 1776 bis 1829, Berlin. Periodico proposto da Lambert e curato da Bode dopo la sua morte. Si veda il sito: "Milestones of Science Books"- https://www.milestone-books.de/.

7 Come è noto, quest'opera risale circa al 300 a. C. ed è composta da tredici capitoli (libri); i primi sei sono dedicati alla geometria piana, i successivi quattro alla teoria dei numeri e gli ultimi tre alla geometria solida. Nell'opera di Euclide viene descritta la geometria del mondo in cui vive l'uomo, partendo da assiomi (o postulati – affermazioni sugli oggetti di studio che vengono considerate vere senza dimostrazione). Per ciò che riguarda il piano, sono identificati cinque postulati, sulla base dei quali sono descritte le proprietà di tutte le figure geometriche logicamente fondate su questi. Il quinto postulato è il più lungo nella sua enunciazione (gli altri occupano meno di una riga ciascuno), il meno intuitivo ed indubbiamente il più complesso. Esso afferma che, qualora due rette intersecate da una terza retta verticale, formino con la retta intersecante due angoli interni, la cui somma è minore di 180° da una parte, da quella stessa parte le due rette finiranno per incontrarsi. Per due millenni i matematici si sono affannati a capire se il quinto fosse un postulato indipendente dagli altri quattro, oppure potesse essere considerato una conseguenza di questi. In altre parole, si voleva vedere se il quinto postulato fosse deducibile dai primi quattro. Agli inizi del XIX secolo (dagli anni venti in poi), dapprima il celebre matematico tedesco Gauss, poi l'ungherese Bolyai ed il russo Lobacevskij, lavorando sull'argomento, avevano mostrato che possono esistere delle geometrie in cui il quinto postulato (e tutti i suoi enunciati equivalenti), non è vero. A metà secolo Riemann, allievo di Gauss all'Università di Gottinga, partendo dai risultati del suo maestro, generalizzò, nella sua lezione di abilitazione all'insegnamento, i concetti di geometria e spazio, così riformulando l'intera geometria (per approfondire, si può vedere, fra i tanti disponibili, Ji et alii, 2017).

Nella sua opera più importante dedicata alla geometria, "Theorie der Parallellinien", scritta nel 1766 e non pubblicata[8], Lambert si occupò del "problema delle parallele" (Gray et al., 1979, pag. 31), aprendo di fatto i mondi delle geometrie non euclidee ben prima di tutti gli Autori ufficialmente accreditati in merito. Nel suo lavoro, che lo soddisfò talmente poco da non procedere con la pubblicazione, Lambert ragionò per assurdo, assumendo delle varianti al quinto postulato di Euclide e tentando di dedurne una contraddizione. Finì tuttavia per far salva l'ipotesi euclidea, salvo lamentare di non essere stato in grado di trovarne la dimostrazione (Basso, 1999 – pag. 15 e Lambert, 1766). Un importante contributo alla matematica fu indubbiamente la prima dimostrazione dell'irrazionalità di π, presentata all'Accademia di Berlino nel 1761 e pubblicata successivamente (Lambert, 1768; Boyer, 1980). Su geometria e trigonometria Lambert aveva già pubblicato nel 1765 il primo di una collezione di tre tomi, che contenevano saggi vari, legati alla matematica pura e applicata: "Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung I"; in particolare, le parti I e IV del volume erano dedicate alla misura di distanze mentre la III alle possibili combinazioni di triangoli su di una sfera e alla loro applicazione per tavole trigonometriche. Il secondo volume dei "Beyträge" fu pubblicato nel 1770 ("Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung II"); diverse sue parti sono propedeutiche al futuro lavoro cartografico di Lambert (Part VI descrive uno strumento e dei metodi per misurare con una certa accuratezza distanze su una carta; Part IX è dedicata alla presentazione di un metodo meccanico per integrare superfici utilizzando poligoni; Part X contiene degli studi di geometria pratica). Infine, nel 1772, Lambert pubblicò nel terzo volume dei "Beyträge " ("Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung III"), il saggio dedicato allo sviluppo di sette nuove proiezioni cartografiche (Part VI: Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmels-Charten[9]).

8 L'opera fu infatti pubblicata solo nel 1786 (nove anni dopo la morte di Lambert), a cura di Bernoulli ed è considerata il miglior lavoro sul problema delle rette parallele prima di Gauss (Gray et al., 1978).

9 Il saggio sulle proiezioni cartografiche di Lambert è stato tradotto nel 1972 da Waldo Tobler in lingua inglese e recentemente ristampato da ESRI Press (2011).

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

Le sette proiezioni cartografiche di Lambert

Come si è visto, nel 1772 Lambert pubblicò la sua unica opera cartografica, che presentava ben sette nuove proiezioni originali, sviluppate facendo uso del calcolo infinitesimale, nato burrascosamente[10] in Europa un solo secolo prima. In un solo lavoro, che Snyder definisce “cornucopia” di importanti proiezioni (1993), Lambert ne presentò ben sette originali, alcune delle quali si sarebbero poi dimostrate di notevole importanza. Lambert non denominò le sue proiezioni; sempre facendo riferimento a Snyder (1993), esse sono generalmente note come:

1. proiezione conforme conica di Lambert;
2. proiezione di Lambert-Lagrange;
3. proiezione trasversa “Mercatore”;
4. proiezione cilindrica equivalente di Lambert e sua trasversa;
5. proiezione equivalente azimutale (o zenitale) di Lambert;
6. proiezione conica equivalente di Lambert.

Le proiezioni di Lambert non ebbero da subito un forte impatto in campo cartografico ma la loro importanza si svelò nel tempo, attraverso il lavoro di matematici, che le ripresero e in alcuni casi le elaborarono. Si consideri il già citato Lagrange e, successivamente, Gauss. Come è noto quest’ultimo adattò la proiezione sferica di Lambert ad un ellissoide, creando il “cuore pulsante” della diffusissima odierna UTM (Universal Transverse Mercator).

Lambert per primo si accostò al problema cartografico (trasformazione di una superficie sferica in una piana), da un punto di vista generale e non limitò i suoi studi al metodo prospettico. Egli infatti considerò lo sviluppo di una proiezione cartografica come un problema matematico, che doveva essere risolto rispettando alcune condizioni generali di partenza, quali la conformità e l’equivalenza (condizioni che però non potevano essere soddisfatte contemporaneamente in una sola proiezione). In tal senso, può essere considerato il padre della scienza relativa alle proiezioni cartografiche (Snyder, 1993).

Prendiamo ad esempio in considerazione la sua proiezione conica conforme. Utilizzando il calcolo infinitesimale e la formula analitica di Bond[11] per la classica proiezione di Mercatore, Lambert dimostrò che quest’ultima rappresentava un caso limite della famiglia di proiezioni conformi coniche, ovvero il caso in cui l’apice del cono a contatto con la sfera sia posto all’infinito (ottenendo l’equatore come parallelo standard). L’altro caso limite è costituito dall’apice del cono posizionato al polo. In questo caso il cono viene appiattito in un piano ed il parallelo standard diviene il punto di contatto (si veda: Monmonier, 2004 e Daners, 2012, che presenta la famiglia delle proiezioni coniche da un punto di vista analitico, facendo uso di strumenti matematici elementari e della trigonometria). La fig. 1 mostra i tre casi (cilindro, cono, piano polare) della proiezione conforme conica.

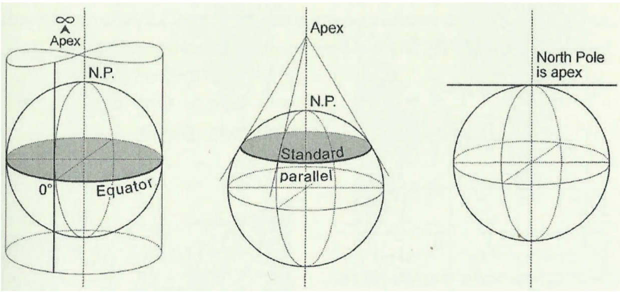

Figura 1. I tre casi della proiezione conforme conica: cilindro (apice del cono all’infinito), cono (apice in un punto fra infinito e il polo), piano polare (apice al polo nord). Fonte: Monmonier, 2004.

10 Si fa qui riferimento alla celebre disputa sulla proprietà intellettuale del calcolo infinitesimale, che ebbe luogo in Europa alla fine del secolo XVII. Oltre ai due protagonisti, ovvero Newton e Leibniz, alla disputa partecipò anche il matematico inglese Wallis, che di fatto la iniziò, scrivendo a Leibniz una lettera nella quale lo accusò di aver presentato come proprie alcune teorie che invece erano di Newton. Non è questa la sede per un tale approfondimento, per il quale si rimanda alla bibliografia (fra i tanti: Giusti, 2007; Clericuzio, 2014).

11 Il matematico inglese Edward Wright è stato il primo a “descrivere le proprietà matematiche” della mappa di Mercatore (Smetanová et alii, 2016), attraverso le sue “tables of meridional parts”, pubblicate per la prima volta nel 1599 in: “Certaine Errors in Navigation”. Successivamente (1645), Henry Bond, un altro matematico inglese, elaborò un’equazione per il calcolo della distanza dei paralleli dall’equatore nella proiezione di Mercatore (Monmonier, 2004).

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

1. La proiezione conforme conica di Lambert (LCC – Lambert Conic Conformal)

Proiezione per sviluppo conica, che consente la rappresentazione di un solo emisfero (quello che contiene il parallelo di tangenza). L'asse terrestre e quello del cono sono coincidenti mentre il punto di vista della proiezione è al centro della sfera. I meridiani sono raggi posti a distanza uguale l'uno dall'altro, che intersecano i paralleli ad angolo retto e convergono verso un punto, vertice, che corrisponde ad uno dei poli della sfera. I paralleli sono archi di cerchio, concentrici verso il vertice, la cui distanza l'uno dall'altro si incrementa, spostandosi dal/i parallelo/i centrale/i. Ci possono essere due paralleli standard (cono secante) oppure uno solo (cono tangente); la scala è unitaria lungo i/il paralleli/o standard, minore di uno fra i due paralleli, maggiore di uno allontanandosi dagli stessi. La mappa è conforme: come in quella di Mercatore tale caratteristica viene persa ai poli. Per quanto riguarda questi ultimi, va ricordato che il polo sito nello stesso emisfero del parallelo standard è puntiforme mentre l'altro polo è posto all'infinito.

La fig. 2 mostra la proiezione conica conforme di Lambert, centrata a Greenwich per la longitudine ed a 45° per la latitudine, con un'estensione verticale di 100°. I due paralleli standard sono fissati rispettivamente a 60° ed a 30°. Il reticolato sovrapposto è a 15° di densità. Il planisfero di fig. 2 è stato realizzato con G.Projector, un software libero multipiattaforma, sviluppato da Goddard Space Flight Center di NASA. Tale applicativo supporta ben 200 diverse proiezioni, da applicare a planisferi o comunque a regioni molto ampie e si appoggia alle sole librerie software Java per il suo funzionamento (cfr.: https://www.giss.nasa.gov/tools/gprojector/).

Figura 2. Mappa regionale di ampie dimensioni realizzata con la proiezione conica conforme di Lambert. Paralleli standard a 60° e 30°; centrata a 0° long e 45° lat; il reticolato sovrapposto è a densità 15°. Realizzata con il software libero di NASA: G.Projector.

Ampiamente trascurata fino alla sua riscoperta, nel primo ventennio dello scorso secolo, da parte di US Coast and Geodetic Survey (Snyder, 1987), LCC fu poi ufficialmente adottata da US State Plane Coordinate System, per gli stati americani che si estendessero in modo predominante in senso longitudinale. Sempre all'inizio del secolo XX, fu usata anche in Francia, durante la Prima Guerra mondiale, per rappresentare teatri di battaglie (Snyder, 1993).

LCC è spesso usata in campo aeronautico, per la sua caratteristica di approssimare un'ortodromia con un

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

tratto rettilineo; ciò è possibile se il percorso che il velivolo deve compiere è abbastanza breve, tale da contenere la differenza dell'angolo formato dalla rotta con il meridiano (nei punti di partenza ed arrivo del velivolo), entro i 3° (per approfondire, si può consultare un qualsiasi manuale di navigazione aerea, ad esempio la risorsa online di Della Gatta - https://www.navigazione-aerea.com/). In Italia, LCC è utilizzata dal CIGA (Centro Informazioni Geotopografiche Aeronautiche), Organo Cartografico dello Stato dal 2001, per:

- la Carta Aeronautica d'Italia in scala 1:500.000 (OACI-CAI);
- la carta per le esigenze del volo militare a bassa quota in scala 1:500.000 (LFC-ITA);
- la carta di radionavigazione in scala 1:350.000 (CRN – si veda: D'Antonio, 2008).

2. La proiezione di Lambert-Lagrange

La seconda proiezione presentata da Lambert nel suo lavoro del 1772 non è conosciuta con il nome del suo ideatore ma con quello del matematico Joseph Louis Lagrange, nato a Torino nel 1736 e chiamato a Berlino da Federico il Grande nel 1766 (Struik, 1987). Nel periodo berlinese della sua vita (1766-1786), Lagrange pubblicò un'estensione al lavoro di Lambert, dedicata alla categoria delle proiezioni conformi il cui reticolato è formato da archi invece che linee dritte (1779). Si trattò di una generalizzazione della proiezione del 1772, in cui erano diverse alcune caratteristiche del reticolato (la spaziatura dei meridiani e l'unico parallelo non arcuato, l'equatore), ma soprattutto diverso era il campo di applicazione della stessa: un ellissoide.

La versione di Lambert è invece applicata ad una sfera ed è una proiezione conforme, che rappresenta l'intero globo in un cerchio (fig. 3). Come osserva Orihuela (2016), l'innovazione più importante di questa proiezione è il mantenimento della conformalità della mappa, nonostante le necessarie alterazioni di latitudine e longitudine per rappresentare l'intero mondo in un cerchio.

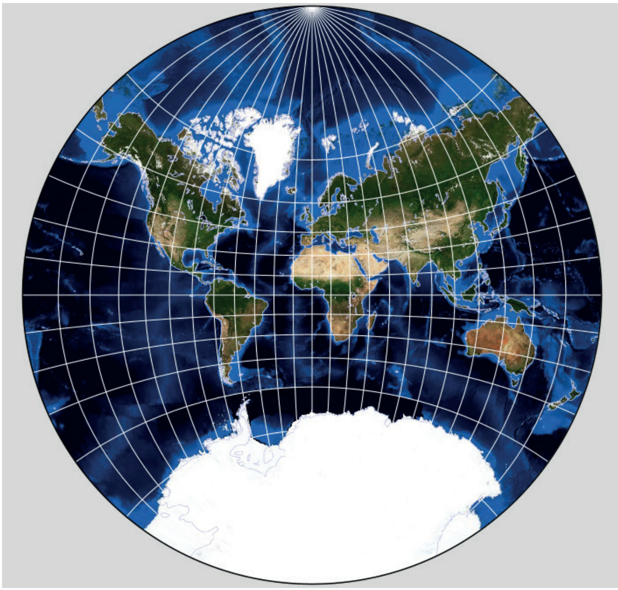

Figura 3. La proiezione conforme di Lambert-Lagrange rappresenta il mondo in un cerchio. Si noti il particolare reticolato formato da archi, a parte il meridiano nel quale la proiezione è centrata (Greenwich) e l'equatore; il reticolato sovrapposto è a densità 15°. Realizzata con il software libero di NASA: G.Projector.

Si tratta di un'evoluzione della proiezione Stereografica, nel suo cosiddetto aspetto equatoriale, che come è noto prevede il punto di vista sull'equatore, opposto al punto di tangenza della sfera con un piano (si può vedere, ad esempio: Greenhood, 1964, pag. 156; Snyder, 1987, pag. 156). Per poter rappresentare l'intero mondo in un cerchio e non un solo emisfero, Lambert utilizzò dei moltiplicatori, applicati ai valori di longitudine e latitudine. In particolare, egli dimezzò la longitudine (in tal modo facendo stare l'intero mondo in un solo cerchio), e sviluppò un moltiplicatore per la latitudine, in modo da ottenere la conformalità della mappa (Fenna, 2007). La proiezione di Lambert-Lagrange è stata raramente utilizzata per la realizzazione di mappe, la si trova per lo più in studi dedicati alle tecniche cartografiche (Snyder, 1993).

3. La proiezione trasversa "Mercatore"

La terza proiezione presentata da Lambert nel suo lavoro del 1772 è conosciuta con svariati nomi: "trasversa Mercatore" è il più generale e diffuso, come lo defini-

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

sce Snyder (1993). Le formule sviluppate da Lambert sono costruite per una sfera, successivamente Gauss ne studiò l'applicabilità ad un ellissoide (1822) e, ancora dopo, Kruger ne pubblicò le formule, rispettivamente negli anni 1912 e 1919 (Snyder, 1987). Lambert la descrisse come un adattamento conforme della allora molto usata proiezione sinusoidale (1772).

Si tratta di una proiezione conforme; si consideri la proiezione di Mercatore classica e si ruoti di 90° il cilindro entro il quale è posto il globo sferico che rappresenta il pianeta: in tal modo la tangenza fra i due avviene lungo un meridiano di riferimento (il baricentro verticale della mappa), invece dell'equatore. Il reticolato che ne consegue vede i meridiani e i paralleli non più linee diritte (come nella proiezione di Mercatore), bensì delle curve complesse. Le uniche linee diritte sono il meridiano centrale (tangenza fra cilindro e sfera), l'equatore e ciascun meridiano posto a 90° dal meridiano centrale (fig. 4). L'errore di scala è funzione della distanza dal meridiano centrale, come nel caso di Mercatore era stato funzione della distanza dall'equatore.

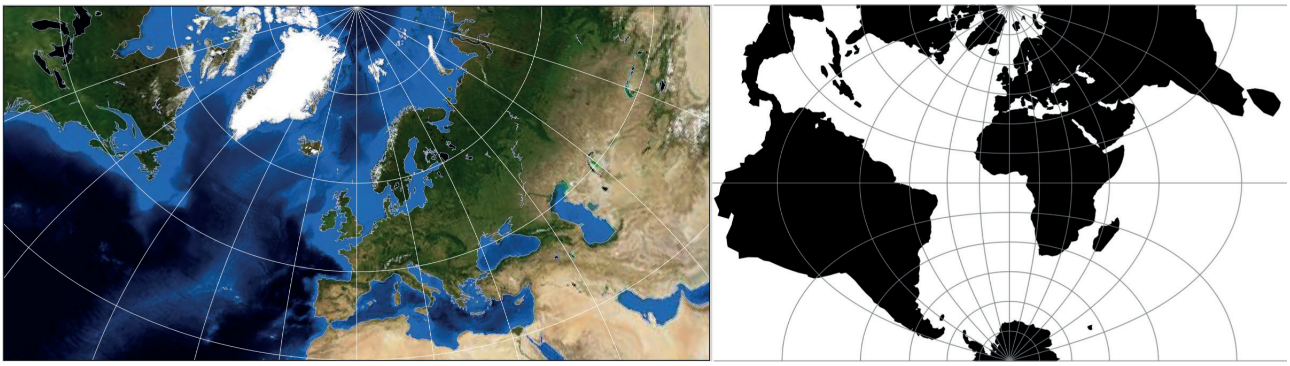

Figura 4. La proiezione trasversa "Mercatore" di Lambert applicata ad una sfera. Il riquadro di sinistra mostra la proiezione applicata ad un'ampia regione, centrata a longitudine 0° (Greenwich) e latitudine 60°, per un'altezza di 60°. Il reticolato è a densità 15°. La mappa è stata realizzata con il software libero di NASA: G. Projector. Il riquadro di destra mostra la medesima proiezione applicata a tutto il mondo, centrata a longitudine 0° e ricavata dalla libreria del software libero PROJ (https://proj.org/about.html).

La proiezione non è geometrica, i meridiani ed i paralleli curvi sono infatti il frutto di una trasformazione matematica, la stessa sviluppata da Cassini nel 1745 per la sua proiezione non conforme né equivalente; i meridiani e paralleli, sviluppati da Cassini, vengono applicati al caso in oggetto, adottando le spaziature fra essi per rispettare la conformalità del prodotto finale (per approfondire, si veda: Snyder, 1993, pag. 83; Snyder, 1987, pag 58).

Poiché, come si è visto, la scala rimane costante lungo il meridiano centrale, la proiezione trasversa "Mercatore" (ptM) risulta particolarmente adatta per la mappatura di territori che si estendono in modo predominante in senso latitudinale (Lambert, nel suo lavoro del 1772, illustrò infatti tale proiezione per mezzo di una mappa delle Americhe). Nella sua forma sferica, ptM ha avuto un limitato utilizzo, diversamente si può affermare della sua forma ellissoidale, che forse è in assoluto la proiezione maggiormente utilizzata (si consideri UTM – Universal Transverse Mercator ed il suo utilizzo globale nella cartografia moderna – cfr.: Favretto, 2021).

4. La proiezione cilindrica equivalente di Lambert e sua trasversa

Si è deciso di presentare le proiezioni equivalenti cilindriche (verticale e trasversa) di Lambert in un unico paragrafo, dato l'evidente collegamento fra le due.

La proiezione equivalente cilindrica di lambert è considerata la più semplice proiezione equivalente. Applicata ad una sfera, è una proiezione prospettica su un cilindro tangente all'equatore. I meridiani sono proiettati dal centro della sfera sul cilindro mentre i paral-

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

leli ortograficamente dall'infinito, attraverso linee parallele al piano equatoriale (Snyder, 1987). Il risultato è un reticolo con i meridiani ed i paralleli come linee diritte (fig. 5). L'equatore è diviso in 360 parti uguali, una per grado; i meridiani intersecano l'equatore con angoli retti. Per quanto riguarda la spaziatura dei paralleli, la ratio seguita da Lambert parte dall'osservazione che c'è un incremento spaziale dei territori da mappare, procedendo dall'equatore ai poli, che è proporzionale al seno della latitudine. L'equivalenza della mappa richiede quindi una diminuzione spaziale dei gradi di latitudine verso i poli (e la conseguente diminuzione dell'altezza delle celle del reticolato, determinata dalla spaziatura dei paralleli).

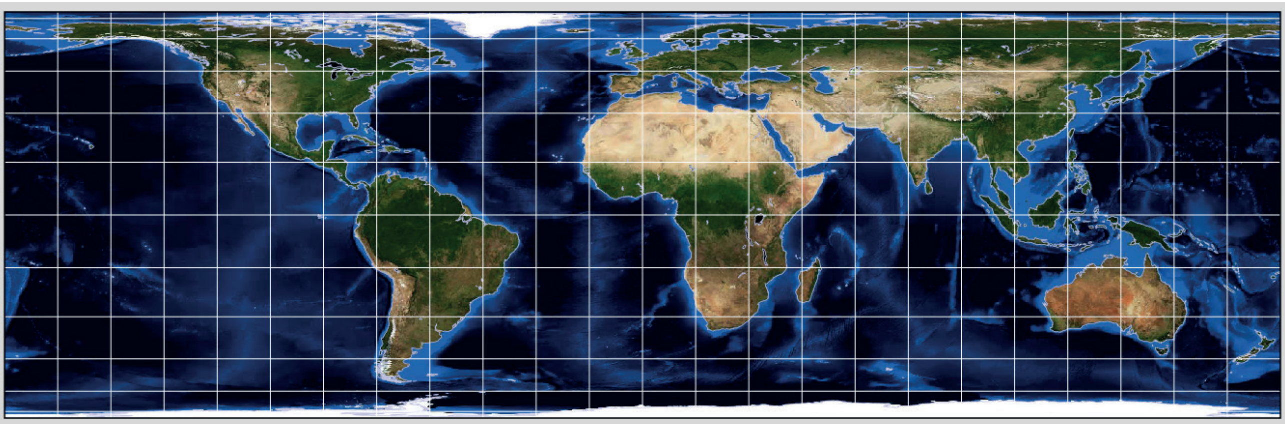

Figura 5. La proiezione equivalente cilindrica di Lambert applicata ad una sfera e centrata a longitudine 0 (meridiano di Greenwich). Il reticolato è a densità 15°. La mappa è stata realizzata con il software libero di NASA: G. Projector.

La mappa è equivalente lungo il parallelo standard (equatore); essa è anche conforme mentre ai poli la deformazione di scala è estrema.

La proiezione equivalente cilindrica trasversa di Lambert è ottenuta dalla rotazione del cilindro e dalla conseguente tangenza della sfera al cilindro lungo un meridiano di riferimento, invece che l'equatore. Il reticolato conseguente risulta profondamente diverso rispetto alla versione verticale. Meridiani e paralleli sono infatti curve, a parte il meridiano di tangenza e, come nel caso della già vista proiezione trasversa "Mercatore", l'equatore e ciascun meridiano posto a 90° dal meridiano centrale. La fig. 6 mostra il planisfero ottenuto dall'applicazione della proiezione alla Terra, il meridiano di tangenza è quello di Greenwich.

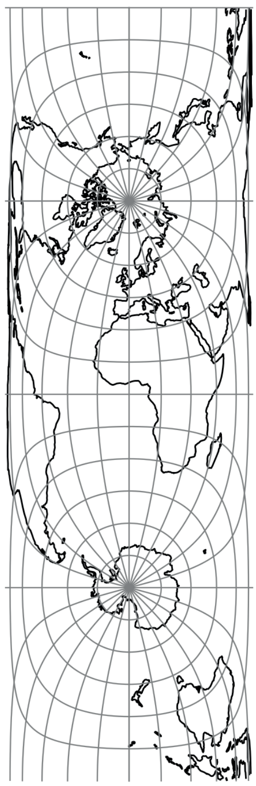

Figura 6. La proiezione equivalente cilindrica trasversa di Lambert, applicata ad una sfera e centrata a longitudine 0 (meridiano di Greenwich). Fonte: libreria del software libero PROJ (https://proj.org/about.html).

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

Ambedue le proiezioni hanno avuto scarsa applicazione in campo cartografico, se non per mostrare un esempio didattico di costruzione di una mappa equivalente (per ciò che riguarda la versione verticale). Come nel caso della trasversa cilindrica "Mercatore", anche la trasversa cilindrica equivalente trova una teorica miglior applicabilità a Paesi che si sviluppano latitudinalmente (direzione nord/sud). Nella sua opera, Lambert riportò come esempio per tale proiezione una mappa dell'Asia (Lambert, 1772, tradotto 1972, pag. 72).

5. La proiezione equivalente azimutale (o zenitale) di Lambert

È una proiezione non prospettica, frutto dell'applicazione del calcolo differenziale per ricavare la distanza dei cerchi rappresentanti i paralleli, allontanandosi progressivamente dal centro della proiezione (un polo, nella versione polare della stessa). Per questo motivo, è stata definita: "synthetic azimuthal in that it was derived for the specific purpose of maintaining equal area" (Snyder, 1987, pag. 182). Oltre alla già citata versione polare, Lambert discusse anche la versione equatoriale, che prevede il punto di tangenza fra sfera e piano, per l'appunto, lungo l'equatore. Si tratta di una proiezione con ottime "performance" in termini di precisione, l'ultima grande proiezione della ricca "cornucopia" di Lambert. Facendo infatti riferimento alla versione polare, oltre al fatto di essere equivalente e di avere le direzioni corrette dal centro della proiezione (la cosiddetta "true direction", dal punto di tangenza fra piano e sfera, una caratteristica di tutte le proiezioni azimutali), la proiezione di Lambert si distingue per una scala meno variabile (rilevata a varie distanze dal polo), rispetto alla scala rilevata al centro di proiezione, rispetto a tutte le altre azimutali (si veda la tabella 21 di pagg. 142-144 di Snyder, 1987).

La versione polare è riportata sulla fig. 7. Il reticolato è formato da meridiani come linee diritte, che hanno origine nel polo e sono equi-spaziate; i paralleli sono invece cerchi di diverso raggio, centrati al polo. La spaziatura dei paralleli determina l'equivalenza della mappa ed è ricavata dal calcolo differenziale. I paralleli risultano meno distanti l'uno dall'altro incrementando la distanza dal polo. Il polo opposto al centro della proiezione non è visibile (l'equatore è generalmente l'ultimo parallelo disegnato).

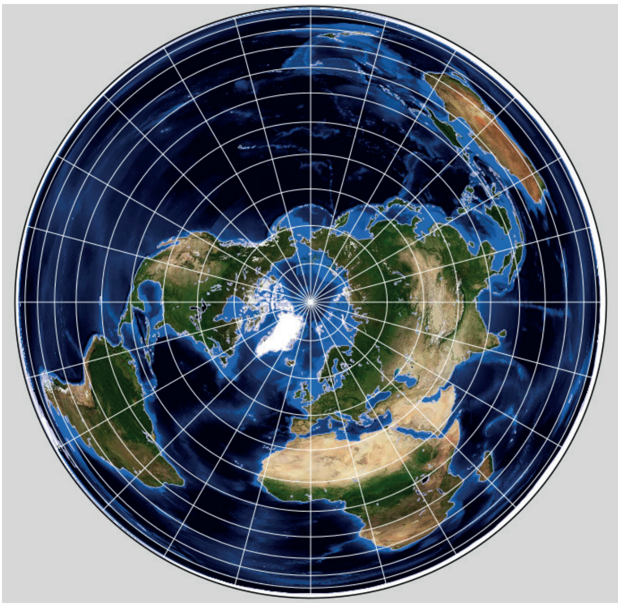

Figura 7. La proiezione equivalente azimutale di Lambert nella sua versione polare (nord). La mappa è centrata a longitudine 0 (meridiano di Greenwich), il reticolato è a densità 15°. La mappa è stata realizzata con il software libero di NASA: G. Projector.

La versione equatoriale è invece riportata sulla fig. 8. Come in tutte le azimutali, le uniche linee diritte sono l'equatore ed il meridiano centrale (Greenwich nel caso della figura). Tutto il resto è costituito da linee curve, meno il cerchio esterno (è l'ultimo meridiano prima dell'antimeridiano centrale). Le curve sono particolarmente complesse; si può notare ad occhio che i meridiani siano maggiormente ravvicinati dal centro alla periferia della mappa mentre i paralleli assumono la forma di archi, tendenzialmente circolari in sequenza verso i poli, con la caratteristica di una curvatura più marcata approssimandosi ai poli.

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

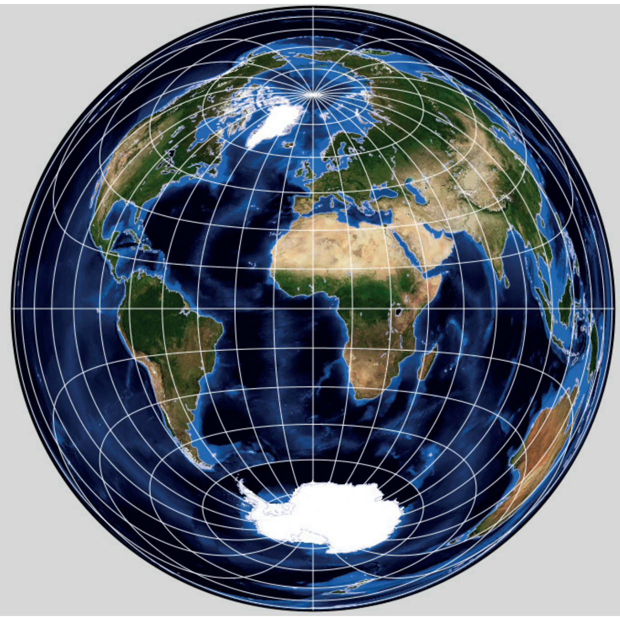

Figura 8. La proiezione equivalente azimutale di Lambert nella sua versione equatoriale. Il meridiano della tangenza equatoriale è quello di Greenwich. Il reticolato è a densità 15°. La mappa è stata realizzata con il software libero di NASA: G. Projector.

La proiezione equivalente azimutale, nelle versioni discusse da Lambert ed anche in quella obliqua sono state utilizzate per la rappresentazione di aree estese in atlanti pubblicati nella seconda metà del secolo scorso. Snyder (1987) ricorda la versione polare apparsa sull'atlante nazionale, pubblicato nel 1970 da USGS (United States Geological Survey, l'ente cartografico americano), come base cartografica di mappe tematiche (spedizioni polari al nord ed al sud del mondo). Sempre USGS ha utilizzato la versione equatoriale per la realizzazione di mappe dell'oceano Pacifico.

Attualmente la Commissione europea utilizza la proiezione equivalente azimutale di Lambert per il suo "European Soil Database" (layer vettoriali e attributi - https://esdac.jrc.ec.europa.eu/content/european-soil-database-v20-vector-and-attribute-data).

In campo geofisico, la proiezione equivalente azimutale di Lambert viene infine utilizzata per l'analisi della propagazione delle onde sismiche e per la mappatura dei terremoti, allo scopo di calcolare la velocità di dispersione delle curve sismiche (Lyu et alii, 2017). Sempre in campo geofisico, la stessa è stata usata per la determinazione dei meccanismi focali alla base delle deformazioni della regione generante le onde sismiche (Kagan, 2013).

6. La proiezione conica equivalente

L'ultima delle proiezioni estratte dalla cornucopia di Lambert è poco utilizzata nella sua forma del 1772 mentre la successiva proiezione di Heinrich Christian Albers (1805), che ne rappresenta la generalizzazione con due paralleli standard, è invece abbastanza comunemente impiegata nella rappresentazione di aree che si sviluppano in senso longitudinale (ad esempio per gli Stati Uniti, con i due paralleli standard generalmente a 30 e 45 gradi – cfr. Snyder, 1987): i migliori risultati si ottengono però quando le terre da mappare sono poste ad una latitudine inferiore ai 45° (intervallo: 30/45 gradi).

Lambert utilizzò nuovamente il calcolo differenziale per sviluppare una proiezione che fu un adeguamento della versione polare della sua proiezione azimutale equivalente (si veda il punto precedente). A differenza della più diffusa proiezione di Albers, nella proiezione di lambert almeno uno dei due paralleli standard è costituito da un polo. La spaziatura dei paralleli sul reticolato, che si contrae dal polo verso l'esterno, viene ottenuta moltiplicando il raggio di ciascun parallelo di latitudine per una costante, legata alla misura dell'angolo fra i due meridiani sottesi (ovvero al fattore di contrazione m dell'angolo), che si intersecano al polo. Opportunamente legando le due grandezze (raggio alla latitudine ϕ e fattore m), si ottiene l'equivalenza lungo il parallelo; lungo il parallelo standard vi è inoltre conformità (si veda: Snyder, 1993 e Lambert, 1772, tradotto 1972).

Sulla fig. 9 si può vedere il planisfero risultato dell'applicazione della proiezione conica equivalente di Lambert, con il secondo parallelo standard fissato all'equatore.

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

Figura 9. La proiezione conica equivalente di Lambert, con i paralleli standard rispettivamente al polo nord ed all'equatore, applicata ad una sfera e centrata a longitudine 0 (meridiano di Greenwich). Fonte: libreria del software libero PROJ (https://proj.org/about.html).

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

Bibliografia

Basso P. (1999), Filosofia e geometria. Lambert interprete di Euclide, La Nuova Italia, Firenze.

Benedetti B. (2008), "L'Accademia delle Scienze di Berlino e la sua biblioteca: un punto di riferimento per gli studiosi di tutta Europa", Biblioteche oggi, n. 5, pag. 41-47.

Boyer C. B. (1980), Storia della matematica, Mondadori, Milano.

Carlyle T. (2017), History of Friedrich II of Prussia, called Frederick the Great, Hansebook edition.

Clericuzio A. (2014), "Il Seicento. Scienze e tecniche", in: Eco U., (a cura di), Storia della civiltà europea, Encyclomedia, http://www.encyclomedia.it/ .

Barbero A. (2007), Federico il Grande, Sellerio, Palermo.

D'Antonio M. (2008), "Il Centro Informazioni Geotopografiche Aeronautiche. L'origine e l'evoluzione", Bollettino AIC, nr. 132, pag. 133-134.

Daners D. (2012), "The Mercator and Stereographic Projections, and Many in Between", The Mathematical Association of America, 119, pag. 190-210.

Dello Preite M. (1979), L'immagine scientifica del mondo di Johann Heinrich Lambert, Dedalo Libri, Bari.

Dwyer P. G. (2014), The Rise of Prussia 1700-1830, Routledge.

Favretto A. (2021), Dalla Terra alla carta. Elementi di cartografia digitale, Patron, Bologna.

Fenna D. (2007), Cartographic Science. A Compendium of Map Projections with Derivations, CRC Press – Taylor & Francis Group, Boca Raton (FL).

Ferrari S. (2003), "Cultura letteraria e sapere scientifico nelle accademie tedesche e italiane del Settecento", Memorie della Accademia Roveretiana degli Agiati, ser. II, vol. VII, Rovereto, pag. 5-133.

Giusti E. (2007), Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento, Ist. Editoriali e Poligrafici.

Gray J. J., Tilling L., (1978), "Johann Heinrich Lambert, mathematician and scientist, 1728-1777, Historia Mathematica", Vol. 5, Issue 1, pag. 13-41.

Griffing H. (1893), "A Study in the Development of the Critical Philosophy", The Philosophical Review, Vol. 2, No. 1, pag. 54-62.

Hulliger B. (2013), "Johann Heinrich Lambert: An Admirable Applied Statistician", Bulletin of the Swiss Statistical Society, Nr. 14, Bern, pag. 4-10.

Ji L., Papadopoulos A., Yamada S. (2017), From Riemann to Differential Geometry and Relativity, Springer.

Kagan Y. Y. (2013), "Double-couple earthquake source: symmetry and rotation", Geophys. J. Int. 194, pag. 1167–1179.

Kant I. (1999), Briefe (AA 10–13), (English translation: Correspondence), Cambridge University Press.

Lagrange J. L. (1779), "Sur la Construction des Cartes Geographiques", Nouveaux Memoires de l'Academie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229223s/f639 .

Lambert J. H. (1758), "Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs et en général par plusieurs milieux réfringens, sphériques et concentriques", Chez H. Scheurleer, F. Z. & Compagnie.

Lambert J. H. (1759), "Die freie Perspektive oder Anweisung jeden perspektivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen", Zürich. L'opera fu pubblicata lo stesso anno in francese: La perspective affranchie de l'embarras du plan géométral, Zürich, http://www.kuttaka.org/~JHL/L1759a.pdf .

Lambert J. H. (1760), "Photometria sive de mensure et gradibus luminis colorum et umbra", Basel, http://www.kuttaka.org/~JHL/L1760a.pdf .

Lambert J. H. (1761), "Cosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues", Augsburg, Klett, https://www.deutschestextarchiv.de/book/show/lambert_einrichtung_1761; traduzione francese di A. de Darquier:

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)

"Lettres cosmologiques sur l'organisation de l'univers", ecrites en 1761, van Keulen, 1801, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k75366c.texteImage# ; traduzione inglese di S. L. Jaki: "Cosmological Letters on the Arrangement of the World Edifice", Science History, New York, 1976.

Lambert J. H. (1764), "Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrthum und Schein (2 Bande)", Leipzig, http://www.kuttaka.org/~JHL/L1764a_I.pdf (band1), http://www.kuttaka.org/~JHL/L1764a_II.pdf (band 2).

Lambert J. H. (1765), Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung I, Berlin.

Lambert J. H. (1766), "Theorie der Parallellinien", a cura di Johann III Bernoulli, Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, si veda: Wilhelm Servatius Peters, Johann Heinrich Lamberts Konception einer Geometrie auf einer imaginären Kugel, Kant-Studien, 1962, https://it.booksc.me/book/44040200/2fbbb8 .

Lambert J. H. (1768), "Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques", Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin, Berlin.

Lambert J. H. (1770), Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung II, Berlin.

Lambert J. H. (1772), Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung III, Berlin; tradotto in inglese da W. Tobler, Notes and comments on the composition of terrestrial and celestial maps, Ann Arbor, 1972; ristampato da ESRI press, 2011.

Lambert J. H. (1781-1787), "Deutscher gelehrter Briefwechsel", 5 Bände, Berlin, Selbstverlag, ed. Bernoulli J. III, Band 3: Correspondence with the mechanic G.F. Brander, http://www.kuttaka.org/~JHL/LBW_III.pdf .

Lambert J. H. (1781-1787), "Deutscher gelehrter Briefwechsel", 5 Bände, Berlin, Selbstverlag, ed. Bernoulli J. III, Band 1: Correspondence with Georg Jonathan von Holland; Immanuel Kant, http://www.kuttaka.org/~JHL/LBW_I.pdf .

Lambert J. H. (1915). Monatsbuch, a cura di K. Bopp, in: Abhandlungen der bayerischen Akademie der Wissenschaften, Munchen.

Lyu C., Pedersen H. A., Paul A., Zhao L., Solarino S., CIFALPS Working Group (2017), "Shear wave velocities in the upper mantle of the Western Alps: newconstraints using array analysis of seismic surface waves", Geophys. J. Int., 210, pag. 321-331.

Maurer H., (1931), "Johann Heinrich Lambert", The International Hydrographic Review, Vol. VIII, n. 1.

Monmonier M. (2004), Rhumb Lines and Map Wars. A Social History of the Mercator Projection, Chicago & London, University Chicago Press.

Orihuela S. (2016), "Generalization of the Lambert–Lagrange projection", The Cartographic Journal, 53, 2, pag. 1-14.

Smetanová D., Vargová M., Biba V., Hinterleitner I. (2016), "Mercator's Projection – a Breakthrough in Maritime Navigation", Naše more, 63(3), pag. 182-184.

Snyder J. P. (1993), Flattening the Earth. Two Thousand Years of Map Projections, University Chicago Press, Chicago & London.

Snyder J. P. (1987), Map Projections - a working Manual, US Geological Survey Professional Paper 1395, Washington

Struik D. J. (1987), A Concise History of Mathematics, Dover Publication, New York.

Wright E. (1599), "Certaine Errors in Navigation, arising either of the ordinarie erroneous making or using of the Sea chart, Compasse, Crosse staffe, and Tables of Declination of the Sunne, and fixed Starres detected and corrected", Valentine Sims, London.

ISSN 2282-572X (online)
ISSN 0044-9733 (print)