

QuaderniCIRD



n. 19 (2019)

Numero ordinario

ISSN: 2039-8646

Homepage: <<https://www.openstarts.units.it/dspace/handle/10077/3845>>



QuaderniCIRD

Rivista del Centro Interdipartimentale
per la Ricerca Didattica dell'Università di Trieste

*Journal of the Interdepartmental Center
for Educational Research of the University of Trieste*

n. 19 (2019)

Direttore responsabile

Luciana Zuccheri

Comitato editoriale

Silvia Battistella, Dipartimento di Scienze della Vita

Furio Finocchiaro, Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Helena Lozano Miralles, Dipartimento di Scienze Giuridiche, del Linguaggio,
dell'Interpretazione e della Traduzione

Tiziana Piras, Dipartimento di Studi Umanistici

Paolo Sorzio, Dipartimento di Studi Umanistici

Michele Stoppa, Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Verena Zudini, Dipartimento di Matematica e Geoscienze

© copyright Edizioni Università di Trieste, Trieste 2018.

Proprietà letteraria riservata.

I diritti di traduzione, memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale e parziale di questa pubblicazione, con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm, le fotocopie e altro) sono riservati per tutti i paesi.

EUT - Edizioni Università di Trieste

Via E. Weiss, 21 - 34128 Trieste

[HTTP://EUT.UNITS.IT](http://EUT.UNITS.IT)



QuaderniCIRD
n. 19 (2019)

Sommario

4 Luciana Zuccheri
Presentazione

Prima parte (monografica)

Ricordando Giovanni Torelli

7 Luciana Zuccheri
Ricordando Giovanni Torelli - Introduzione

10 Lucio Torelli
Giovanni Torelli: sono passati trent'anni ...

14 Pierpaolo Omari
Giovanni Torelli, un matematico appassionato: il profilo scientifico, in breve

24 Luciana Zuccheri
Giovanni Torelli, un uomo d'azione nel campo della didattica della matematica

Seconda parte

37 Andrea Sgarro
Come contraddirsi rimanendo coerenti: il caso della logica fuzzy

46 Aljoša Volčič
Spunti e riflessioni per l'insegnamento del calcolo delle probabilità

Terza parte

Notizie

- 78 Luciana Zuccheri, Pierpaolo Omari, Lucio Torelli
Incontro “Giovanni Torelli 1988-2018. Il ricordo di un matematico appassionato” (Trieste, 20 dicembre 2018)
- 82 Sandra Pellizzoni, Chiara De Vita, Martina Fontana, Marta Vidoz, Marija Živković e Maria Chiara Passolunghi
La Giornata di formazione “Per un percorso di crescita e d’inclusione: sinergia tra Università e Scuola” (Trieste, 18.10.2019)
- 87 Valentina Bologna, Maria Peressi, Francesco Longo, Giorgio Pastore
Interazione disciplinare tra matematica e fisica: un incontro di formazione per gli insegnanti con Olivia Levrini

Questo numero della rivista è stato curato da:

Luciana Zuccheri, Michele Stoppa.

Revisione dei sunti in Inglese:

Monica Randaccio.

Presentazione

Il numero 19 (2019) di “QuaderniCIRD” è dedicato soprattutto alla *Matematica*, ma, confermando la sua natura multidisciplinare, riporta anche due contributi dedicati alle *Scienze psicologiche* e alla *Fisica*.

Eccezionalmente, è diviso in tre parti.

La prima parte del numero, monografica, è interamente dedicata al matematico *Giovanni Torelli*, scomparso il 20.12.1988, che svolse la sua attività scientifica a Trieste dalla fine degli anni Cinquanta. Come illustrato nell'introduzione di *Luciana Zuccheri*, i tre articoli in essa contenuti lo descrivono da vari punti di vista, per tratteggiarne degnamente un ritratto a tutto tondo.

Nel primo di questi, *Lucio Torelli* introduce la figura del padre Giovanni, soffermandosi su aspetti biografici.

Nel secondo, *Pierpaolo Omari* illustra il profilo scientifico di Giovanni Torelli, descrivendo sinteticamente i temi principali della sua ricerca nel settore dell'*Analisi matematica* e le sue pubblicazioni, analizzandone le ricadute.

Nel terzo articolo, *Luciana Zuccheri* si sofferma sulle attività nel campo della *Didattica della matematica*, descrivendo le motivazioni metodologiche di Torelli, il suo lavoro nel Nucleo di Ricerca Didattica di Trieste e alcune importanti iniziative da lui stesso promosse per la formazione degli insegnanti.

La seconda parte del numero contiene due articoli che traggono origine da seminari per gli insegnanti di Scuola secondaria svolti nell'ambito del *Programma di Matematica* (edizione a. a. 2018-19) del Polo di Trieste del Progetto “I Lincei per una nuova didattica nella scuola: una rete nazionale”.

Nel primo di questi, *Andrea Sgarro*, partendo dalla considerazione che la logica delle lingue naturali è decisamente più flessibile della logica binaria aristotelica - in cui sono presenti solo due gradi di verità, il vero e il falso - introduce i concetti di base

della *logica fuzzy*, applicabile nel campo dell'*intelligenza artificiale* per rendere più efficiente il modo in cui i calcolatori “pensano”.

Il secondo articolo, di *Aljoša Volčič*, riguarda l'insegnamento del *Calcolo delle probabilità* nella Scuola secondaria e ne sottolinea la criticità a qualunque livello. L'autore, seguendo l'evoluzione storica della disciplina, parte da semplici problemi dell'approccio classico, fino ad arrivare ai concetti di *probabilità condizionata* e di *indipendenza*.

La terza parte del numero contiene tre notizie.

Nella prima di queste, riguardante la Matematica, *Luciana Zuccheri*, *Pierpaolo Omari* e *Lucio Torelli* illustrano lo svolgimento dell'incontro “Giovanni Torelli 1988-2018. Il ricordo di un matematico appassionato” (Trieste, 20 dicembre 2018).

La seconda notizia, di *Sandra Pellizzoni*, *Chiara De Vita*, *Martina Fontana*, *Marta Vidoz*, *Marija Živković* e *Maria Chiara Passolunghi*, riguarda le Scienze psicologiche. Vi si descrivono le motivazioni e lo svolgimento della Giornata di formazione “Per un percorso di crescita e d'inclusione: sinergia tra Università e Scuola” (Trieste, 18.10.2019).

La terza notizia riguarda la Fisica e le sue relazioni con la Matematica: *Valentina Bologna*, *Maria Peressi*, *Francesco Longo* e *Giorgio Pastore* danno un dettagliato resoconto di un seminario per i docenti di area scientifica delle scuole secondarie organizzato nell'ambito delle attività del Piano Lauree Scientifiche di Fisica e Matematica dell'Università degli Studi di Trieste, dal titolo “Interazioni disciplinari tra matematica e fisica: dalle difficoltà concettuali all'integrazione disciplinare” (Trieste, 26.11.2019).

LUCIANA ZUCCHERI
Direttore della rivista “QuaderniCIRD”
CIRD - Università di Trieste

Prima parte (monografica) - Ricordando Giovanni Torelli

*Ricordando Giovanni Torelli – Introduzione**

Mi ha fatto molto piacere quando, nel 2018, mi è stato proposto di realizzare un incontro, presso il Dipartimento di Matematica e Geoscienze dell'Università di Trieste, per ricordare Giovanni Torelli a trent'anni dalla sua scomparsa, avvenuta il 20 dicembre del 1988, e ho aderito immediatamente.

Giovanni Torelli è stato ricordato ufficialmente già due volte con iniziative svoltesi presso l'Università di Trieste:

- Nel 1995, con le “Giornate di Didattica, Storia ed Epistemologia della Matematica in ricordo di Giovanni Torelli”, un convegno di studi che ha coinvolto docenti universitari e delle scuole secondarie (Trieste, 29-30 agosto 1995)¹.
- Nell'a. a. 2000/2001, con il “Premio Giovanni Torelli per un lavoro multimediale di matematica” rivolto agli studenti delle scuole secondarie (cerimonia di premiazione 19 aprile 2001)².

Per ricordarlo degnamente, dal punto di vista professionale, bisogna tenere presenti diversi aspetti:

- Giovanni Torelli è stato un matematico e ha svolto ricerche nel campo dell'Analisi matematica. Molti lo ricordano innanzitutto come professore di matematica nell'Università di Trieste.
- Prima di diventare professore universitario, è stato professore di matematica nelle Scuole secondarie e, in particolare, ha insegnato per vari anni al Liceo scientifico «G. Oberdan» di Trieste.

* *Title: Remembering Giovanni Torelli - Introduction.*

¹ Giornate di Didattica, Storia ed Epistemologia della Matematica in ricordo di Giovanni Torelli, vedi Siti web. Per gli Atti del Convegno, cfr. INVERNIZZI 1995.

² Premio “Giovanni Torelli” per un lavoro multimediale di matematica. Premiazione delle Olimpiadi della Matematica, vedi Siti web.

- Quando ha lasciato la Scuola secondaria di secondo grado per passare all'Università, ha voluto operare per creare e mantenere vivi i contatti tra il mondo accademico e quello della scuola pre-universitaria. Egli riteneva che questo fosse molto importante per contribuire a migliorare e a rinnovare l'insegnamento della matematica.

Tali considerazioni riguardano solo l'aspetto professionale: oltre a tutto ciò, Giovanni Torelli è stato una figura eccezionale, perché era dotato di una grande umanità. Egli aveva una dote non comune: sapeva ascoltare le persone e cercava di comprenderle. Inoltre, se era necessario, faceva il possibile per aiutare chi ne aveva bisogno, con grande discrezione e col massimo rispetto per l'altro. Questi tratti caratteristici che lo distinguevano erano frutto delle sue convinzioni, della sua visione della vita e della sua grande spiritualità.

Nella Sezione "Notizie" di questo numero della rivista si riporta una breve cronaca dell'incontro svoltosi presso l'Università di Trieste il 20 dicembre 2018, intitolato *Giovanni Torelli 1988-2018, Il ricordo di un matematico appassionato*.

Nelle pagine che seguono, invece, si desidera tratteggiare a tutto tondo la figura di Giovanni Torelli, riportando tre contributi che traggono origine dall'evento citato: nel primo, scritto dal figlio Lucio, si danno le notizie biografiche essenziali; nel secondo, Pierpaolo Omari passa in rassegna il lavoro di Giovanni Torelli nel settore dell'Analisi matematica; nel terzo, infine, io stessa descrivo il lavoro di Giovanni Torelli nel settore della didattica della matematica.

BIBLIOGRAFIA

INVERNIZZI S. (a cura di)
1995, *Giornate di Didattica, Storia, ed Epistemologia della Matematica in ricordo di Giovanni Torelli (Trieste, 29-30 agosto 1995)*, Università di Trieste.

SITI WEB

NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI TRIESTE
(Home page, <<http://www.nrd.units.it/>>, sito consultato il 10.12.2019.)

Giornate di Didattica, Storia ed Epistemologia della Matematica in ricordo di Giovanni Torelli, <http://www.nrd.units.it/giovanni_torelli.htm>, sito consultato il 10.12.2019.

Premio “Giovanni Torelli” per un lavoro multimediale di matematica. Premiazione delle Olimpiadi della Matematica, <<http://www.nrd.units.it/attivita/premiotorelli/premiotorelli.html>>, sito consultato il 10.12.2019.

LUCIANA ZUCCHERI
Direttore responsabile “QuaderniCIRD”
Università di Trieste
zuccheri@units.it

Giovanni Torelli: sono passati trent'anni ...^{*°}

LUCIO TORELLI

Dipartimento Universitario Clinico di Scienze mediche,
chirurgiche e della salute, Università di Trieste
torelli@units.it

ABSTRACT

This article introduces the figure of Giovanni Torelli, an Italian mathematician, in his son Lucio's memories. The figure of the mathematician and the passionate teacher comes to light, but above all Giovanni's desire and ability to establish a relationship with the 'other', be it colleague or student. This reciprocal relationship with the other has become the basis for his teaching style and for an interdisciplinary research work.

PAROLE CHIAVE / KEYWORDS

MATEMATICA / MATHEMATICS; GIOVANNI TORELLI / GIOVANNI TORELLI.

1. INTRODUZIONE

Sono passati trent'anni, ma il ricordo di mio padre Giovanni è ancora molto vivo anche qui all'Università di Trieste. Non è stato difficile proporre ad alcuni colleghi di ricordarlo in un incontro a lui dedicato. Piaceva a tutti l'idea di ricordare il professore, l'amico, il matematico appassionato, l'uomo d'azione, che ha sempre messo in primo piano l'attenzione e la relazione con l'altro.

Lo ricordo con commozione sia come papà, sia come matematico, dato che anch'io ho scelto anni fa di dedicarmi a questa disciplina.

2. GIOVANNI, MIO PADRE

Giovanni nasce nel 1929 a Trieste, dove i genitori, Costantino ed Edvige, si erano da

* Title: *Giovanni Torelli: thirty years have passed ...*

° Il presente contributo si basa sulla presentazione tenuta dall'autore nell'incontro *Giovanni Torelli 1988-2018, Il ricordo di un matematico appassionato* (Università di Trieste, 20 dicembre 2018).

poco trasferiti da Genova per motivi lavorativi.

Dopo gli studi presso il Liceo scientifico “G. Oberdan” di Trieste, si iscrive all’Università di Trieste per laurearsi in Matematica. La sua vita è segnata profondamente proprio in quel periodo dalla morte improvvisa del papà, avvenuta durante le loro vacanze in Liguria, in una casa di famiglia a Ronco Scrivia (GE).

Per mantenere la famiglia trova un lavoro come assistente all’*Istituto per ciechi Rittmeyer* di Trieste, lavoro che gli permette comunque di continuare a studiare, in quanto aveva la possibilità di fare diversi turni notturni. Non fu pertanto facile per lui completare gli studi, che terminò nel 1954 con una tesi di Meccanica Razionale, con il prof. Bruno Forte, dal titolo: “Di alcune proprietà differenziali relative ai moti rigidi di puro rotolamento”.

Mi piace ricordare che proprio in una delle aule di questa Università, nel corso di Geometria 2, papà incontrò la mamma, Maria Clotilde, studentessa pure lei a Matematica; unirono così le loro storie personali e scientifiche.

Dopo aver conseguito la laurea, mamma e papà si sposarono nel 1957 e iniziarono a insegnare in diverse scuole della nostra città e di alcune città vicine. In quegli anni la famiglia si arricchì di quattro figli: Paola, Lucio, Marina e Franca¹.

All’inizio degli anni ’60, grazie a una richiesta di Giovanni Prodi che si era rivolto agli insegnanti delle Scuole secondarie per le prime attività del nascente *Istituto di Matematica*, Giovanni iniziò a collaborare con l’Università di Trieste, sia per la didattica sia per la ricerca, fino a diventare Professore Associato in Analisi Matematica nel 1980. Pur essendo un matematico teorico, Giovanni amava scoprire le applicazioni della matematica in campi anche molto diversi tra loro. Era convinto dell’importanza dell’interdisciplinarietà, tema che in quegli anni non era certamente di moda.

Credeva fermamente nella possibilità di dialogo, anche tra ricercatori di discipline diverse, per cercare un terreno di collaborazione nuovo, in cui tenere conto delle specificità di ciascuno, in modo da poter intraprendere una metodologia innovativa

¹ Per una storia più approfondita della nostra famiglia, si veda TORELLI L. 2004.

nella ricerca scientifica.

Ricordo, ad esempio, uno studio che aveva iniziato con il fratello Lorenzo, medico anestesista, e con un collega fisico, sulla ventilazione polmonare forzata da applicare a pazienti in terapia intensiva, secondo un nuovo metodo che si voleva sperimentare, ma che necessitava di un modello teorico.

Ricordo anche la gioia con cui rispondeva alle mie richieste, con le quali cercavo di capire l'utilizzo della matematica in ambiti più applicativi: ancora oggi, in cui mi ritrovo a essere un matematico in un Dipartimento di Medicina, è importante per me ritornare a quei momenti.

Giovanni aveva un talento particolare nel trasmettere la sua passione per la matematica nell'insegnamento, fatto non di formule preconfezionate, ma di un cammino condiviso con gli allievi nello scoprire e nell'apprendere concetti nuovi.

La passione di Giovanni per la matematica e per il suo lavoro scaturiva dalle sue conoscenze, dalle sue competenze, ma anche dalla sua grande attenzione verso l'altro, indifferentemente che fosse collega o studente.

Era spesso il primo ad andare incontro all'altro, in particolare se notava una necessità. Si faceva carico dei pensieri e delle situazioni dell'altro. Ricordo una volta in cui fu criticato da un collega in un modo non corretto su una certa attività che aveva svolto: non si diede pace, finché non ebbe la possibilità di parlare e di chiarirsi con il collega.

3. DUE PAROLE CONCLUSIVE

Ancora oggi incontro delle persone che ricordano con stima, simpatia e affetto di essere stati studenti o colleghi di mio padre. Riemergono episodi buffi, momenti di insegnamento particolarmente significativi, condivisioni di momenti di scelte importanti.

In tutti, il ricordo mette in luce un po' di nostalgia dei periodi belli vissuti insieme, ma ancor di più esprime la consapevolezza di un'amicizia vera, amicizia che è rimasta

viva anche dopo tanto tempo e che è stata un punto di riferimento nella loro vita nel corso degli anni.

BIBLIOGRAFIA

TORELLI L.

2004, *Tendente all'Infinito*, in: A. DIANA (a cura di), «Verso la Vita», (5), Roma, Città Nuova, pp. 91-116.

Giovanni Torelli, un matematico appassionato: il profilo scientifico, in breve^{*°}

PIERPAOLO OMARI
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università di Trieste
omari@units.it

ABSTRACT

The figure of the Italian mathematician Giovanni Torelli, who spent his scientific life in Trieste between the late fifties and the late 1980s, is illustrated with reference to his activities in the field of mathematics research. The main topics of his scientific production, as well as his publications, are synthetically described.

PAROLE CHIAVE / KEYWORDS

MATEMATICA / MATHEMATICS; ANALISI MATEMATICA / MATHEMATICAL ANALYSIS; ANALISI NON LINEARE / NONLINEAR ANALYSIS; EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI / PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS; EQUAZIONI IPERBOLICHE / HYPERBOLIC EQUATIONS; GIOVANNI TORELLI / GIOVANNI TORELLI.

1. QUALCHE RICORDO PERSONALE DI GIOVANNI TORELLI

Prima di tratteggiare la figura di Giovanni Torelli, sotto il profilo scientifico, vorrei premettere qualche ricordo personale. Ho conosciuto Giovanni solo negli ultimi anni della sua vita. L'ho incontrato per la prima volta, credo, tra il 1980 e il 1981, per motivi di carattere "logistico". Mi spiego. Ero da poco laureato e avevo iniziato a lavorare con Fabio Zanolin, che a quel tempo condivideva con altre persone lo studio dell'allora *Istituto di Matematica* dell'Università di Trieste: Franco Chersi, Dino Dal Maso, Luciana Zuccheri e, per l'appunto, Giovanni Torelli. Ricordo la sua figura: alto, magro, con una chioma brizzolata, molto gentile e affabile.

* *Title: Giovanni Torelli, a passionate mathematician: the scientific profile, in brief.*

° Il presente contributo trae origine dalla relazione presentata dall'autore nell'incontro *Giovanni Torelli 1988-2018, il ricordo di un matematico appassionato* (Università di Trieste, 20 dicembre 2018).



Figura 1. Giovanni Torelli, un matematico appassionato ...

In quel periodo avevo un incarico annuale presso il Liceo scientifico “Duca degli Abruzzi” di Gorizia. Incidentalmente: il Preside di quella scuola, Giammaria Gasparini, aveva conosciuto anni addietro Giovanni e me ne parlava spesso e con grande stima, ricordando la sua figura di insegnante.

Giovanni, saputo che insegnavo a scuola, fin dal primo incontro cominciò a descrivermi con convinzione ed entusiasmo le attività che conduceva per aggiornare i metodi di insegnamento della matematica nella Scuola secondaria.

Mi invitò a partecipare alle riunioni del *Nucleo di Ricerca Didattica* che si tenevano presso l'Istituto di Matematica, incoraggiandomi, anzi spronandomi, a impegnarmi concretamente e soprattutto attivamente. Ricordo tali riunioni in cui Giovanni era sempre propositivo, pieno di idee e suggerimenti.

Di quel periodo mi è rimasto particolarmente impresso un convegno svoltosi a Grado nell'ottobre del 1983, dedicato all'introduzione e all'uso delle calcolatrici programmabili e del computer nell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria, a cui avevo

partecipato, da ricercatore universitario, con un'attività laboratoriale. In quell'occasione ebbi modo di apprezzare un'altra dote di Giovanni: la sua capacità come organizzatore.



Figura 2. ... nonché una persona di grande umanità, intelligente, affabile, gentile, ...

Qualche anno più tardi, nell'estate del 1985, partecipai con Giovanni e altri colleghi, fra cui Fabio Zanolin, Sergio Invernizzi e Gabriella Caristi, all'«EquaDiff 6» a Brno, nell'allora Cecoslovacchia.



Figura 3. ...dotata di ironia e di uno spiccato senso dell'umorismo.

In quella circostanza ebbi l'opportunità di conoscere la moglie di Giovanni: Maria Clotilde, persona anche lei gentile, affabile, premurosa. Mia moglie Lorella ha

tuttora un ricordo molto bello di Maria Clotilde: durante quella settimana, mentre noi eravamo al congresso, loro visitarono Brno: la città, la cattedrale di S. Pietro e Paolo, lo Spielberg, ... Mia moglie era molto giovane e, da sola, si sentiva sperduta, sicché Maria Clotilde le fu un po' amica e un po' mamma.

Ricordo poi con tristezza la primavera del 1987 quando Maria Clotilde venne a mancare. Quell'anno Giovanni aveva assunto la supplenza, molto pesante, di uno dei corsi di Analisi Matematica alla Facoltà d'Ingegneria. Da ricercatore universitario, tenevo le esercitazioni per quel corso: Giovanni era molto apprezzato e benvenuto dagli studenti, sia per la competenza e le capacità didattiche, ma anche per il suo fare bonario, la sua gentilezza e il suo senso dell'umorismo.

Quell'anno, ma soprattutto il successivo 1988, cominciai a notare una progressiva stanchezza fisica, che però mai sembrava intaccare lo spirito; nonostante la fatica e le prove dolorose, la sua arguzia e il suo umorismo non venivano mai meno.

Ricordo, infine, quando nel dicembre del 1988, pochi giorni prima dell'operazione al cuore, ci salutammo e *Giovanni Torelli* mi disse, giocando con le parole: "Al mio ritorno sarò di nuovo forte come un *giovane torello!*". Purtroppo Giovanni non è tornato!

Sono ormai passati trent'anni, ma il mio ricordo di Giovanni è ancora vivo e a fuoco, come quello di un uomo dalle grandi qualità umane, intelligente e arguto, soprattutto profondamente sereno, una serenità interiore che traspariva dalle sue parole e dai suoi atti.

Finora ho parlato di Giovanni, ma molto, forse troppo, anche di me stesso. Me ne scuso! Tuttavia per delineare il profilo di una persona che abbiamo conosciuto, inevitabilmente si guarda al riflesso di quella persona su noi stessi. In termini matematici: si ricostruisce il profilo di una persona attraverso le proiezioni su coloro che lo hanno conosciuto [Giovanni, matematico esperto di teoria delle distribuzioni¹ avrebbe forse apprezzato questa immagine].

¹ Una *distribuzione* è un oggetto matematico, precisamente un *funzionale*, che viene identificato per mezzo dell'azione che esso esercita su una opportuna classe di funzioni test.

2. UNA BREVE DESCRIZIONE DELL'ATTIVITÀ SCIENTIFICA DI GIOVANNI TORELLI

Passo ora a descrivere sinteticamente i principali temi dell'attività di ricerca di Giovanni nel campo dell'Analisi matematica.

Negli anni in cui Giovanni Prodi² era docente all'Università di Trieste, Giovanni Torelli partecipava a un *Seminario di analisi matematica* istituito dallo stesso Prodi. Riporto un ricordo scritto da Giovanni Prodi, nel quale viene fortemente sottolineato l'entusiasmo di Giovanni per la ricerca³:

Il tema del seminario era quello delle equazioni di evoluzione, per le quali da un lato c'era la disponibilità delle tecniche allora nuove dell'analisi funzionale e della teoria delle distribuzioni, dall'altro quella dei metodi dell'analisi non lineare [...].

[...] ritengo interessante presentare il tipo di approccio con cui Giovanni li affrontava: si lanciava sui problemi con una buona dose di senso sperimentale e di coraggio, con fantasia e impeto [...]. Chi dirigeva le sue ricerche aveva un compito inconsueto e certamente gradevole: anziché suggerire le idee e farle realizzare (come si fa di solito con un ricercatore alle prime armi) doveva esercitare una specie di censura su quel fiume di proposte che Giovanni formulava.

Nel 1963 ci fu il mio trasferimento a Pisa. Negli anni che seguirono i sacrifici che Giovanni dovette fare per proseguire nella ricerca furono molto pesanti. Giovanni (a volte in compagnia di Luciano de Simon) per venire a Pisa passava la notte (ma talora anche due notti consecutive!), in treno. Ricordo che in molti casi raggiungeva Trieste all'alba per andare a fare lezione al suo liceo scientifico (l' "Oberdan").

I principali temi di ricerca sviluppati da Giovanni Torelli nell'ambito dell'analisi matematica hanno riguardato le *equazioni differenziali alle derivate parziali*, con particolare riguardo a:

- questioni di regolarità per equazioni iperboliche di evoluzione;
- esistenza e unicità per equazioni di tipo iperbolico con discontinuità;
- esistenza di soluzioni periodiche per equazioni non lineari delle onde.

Il principale collaboratore, nonché collega e amico, di Giovanni Torelli nell'attività di ricerca scientifica nel campo delle equazioni differenziali è stato Luciano de Simon⁴, che ho il grande piacere di poter ricordare in questa circostanza.

² Giovanni Prodi (1925-2010) fu un influente matematico italiano, professore presso l'Università di Trieste dal 1956 al 1963 e, successivamente, presso l'Università di Pisa.

³ Il testo riportato è tratto da PRODI 1995, pp. XI-XIV.

⁴ Luciano de Simon (1934-2002) è stato un valente ricercatore e un docente stimato e apprezzato dell'Università di Trieste.



Figura 4. Giovanni Torelli e Luciano de Simon (a sinistra) nel 1978.

2.1 QUESTIONI DI REGOLARITÀ PER EQUAZIONI IPERBOLICHE DI EVOLUZIONE

Lo studio delle equazioni differenziali negli spazi astratti è stato un tema di notevole rilievo e attualità negli anni '60, a cui hanno contribuito matematici di grande prestigio, fra i quali G. Prodi, J. L. Lions, W. Strauss. Giovanni Torelli si è occupato di queste problematiche nel lavoro⁵:

- Torelli G. 1964, *Un complemento ad un teorema di J. L. Lions sulle equazioni differenziali astratte del secondo ordine*,

in cui viene provato un risultato di regolarità per una classe di equazioni di evoluzione lineari che fornisce un importante complemento a un precedente teorema di un matematico di primo piano quale J. L. Lions.

È interessante notare che, in un successivo celebre lavoro, W. Strauss riconosce esplicitamente a Giovanni Torelli il merito di aver risolto il problema nel caso lineare e affronta il caso non lineare, generalizzandone l'approccio. L'articolo di Giovanni Torelli è stato poi ampiamente citato in alcuni articoli di G. Prodi, J. A. Goldstein, M. Nakao, A. Arosio, G. Marino, nonché in un libro di R. W. Carroll⁶.

⁵ TORELLI 1964.

⁶ Cfr. <https://scholar.google.it/scholar?cites=16625986235375120253&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=it>.

2.2 EQUAZIONI DI TIPO IPERBOLICO DEL I O II ORDINE CON COEFFICIENTI DISCONTINUI

Lo studio delle equazioni di tipo iperbolico con coefficienti discontinui è stato iniziato da I. M. Gelfand nel 1959 e contributi al problema sono stati dati da matematici di prestigio, quali O. Oleinik (1959), E. D. Conway e J. Smoller (1966-67), A. E. Hurd e D. H. Sattinger (1968).

Nel lavoro⁷:

- de Simon L., Torelli G., 1974, *Linear second order differential equations with discontinuous coefficients in Hilbert spaces*,

gli autori discutono l'esistenza e l'unicità delle soluzioni di equazioni di evoluzione lineari, del tipo equazioni delle onde, in spazi astratti, sotto condizioni di debole regolarità sui coefficienti rispetto al tempo: l'usuale condizione di lipschitzianità richiesta fino ad allora viene indebolita, richiedendo un'ipotesi di variazione limitata, ammettendo così delle discontinuità. Questo tema è stato poi ripreso e ampiamente studiato a Pisa da E. De Giorgi e dalla sua scuola, nonché in altri articoli apparsi anche recentemente⁸.

Negli articoli⁹:

- de Simon L., Torelli G., 1981, *First order linear partial differential equations with discontinuous coefficients*,
- de Simon L., Torelli G., 1988, *The Cauchy problem for a class of linear partial differential equations with discontinuous coefficients*,

si affronta invece il problema dell'esistenza e dell'unicità delle soluzioni deboli continue del problema di Cauchy per equazioni alle derivate parziali lineari del primo ordine di tipo trasporto. Le ipotesi poste sui coefficienti permettono discontinuità molto generali purché sia soddisfatta una condizione di trasversalità tra le caratteristiche dell'equazione e le discontinuità del campo vettoriale che le

⁷ DE SIMON, TORELLI 1974.

⁸ Cfr. <https://scholar.google.it/scholar?cites=13685249022248871859&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=it>.

⁹ DE SIMON, TORELLI 1981, 1988.

definisce. I risultati ottenuti sono fini e profondi ed esplorano un campo di rilevante interesse e attualità¹⁰.

2.3 ESISTENZA DI SOLUZIONI PERIODICHE PER EQUAZIONI NON LINEARI DELLE ONDE

Nell'articolo¹¹:

- Andreassi G., Torelli G., 1965, *Su una equazione di tipo iperbolico non lineare*, gli autori studiano l'esistenza di soluzioni, con dati al bordo e iniziali nulli, per un'equazione delle onde forzata con dissipazione non lineare, ottenendo un'estensione di un precedente risultato di J. L. Lions e W. Strauss del 1963.

A testimonianza del valore del risultato, questo lavoro, accolto con notevole interesse dallo stesso W. Strauss negli anni immediatamente successivi, è stato poi riscoperto in anni recenti da alcuni autori stranieri¹², nonostante fosse stato scritto in lingua italiana e fosse apparso su una rivista di non amplissima diffusione.

Nei successivi lavori¹³:

- de Simon L., Torelli G., 1968, *Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari*,

- Torelli G., 1969, *Soluzioni periodiche dell'equazione non lineare $u_{tt}-u_{xx}+\varepsilon F(x,t,u)=0$* ,

vengono dimostrati alcuni teoremi di esistenza astratti, che estendono precedenti risultati di P. Rabinowitz, con applicazioni all'esistenza e unicità di soluzioni generalizzate continue del problema Dirichlet-periodico per un'equazione delle onde semilineare.

Nel corso degli ultimi cinquant'anni i risultati ottenuti in questi articoli sono stati ampiamente citati e utilizzati¹⁴, in particolare, da P. Rabinowitz, A. Ambrosetti, G. Prodi, H. Brezis, L. Nirenberg, A. C. Lazer, P. J. McKenna, S. N. Chow, J. K. Hale, J.

¹⁰ Cfr. <https://scholar.google.com/scholar?cites=2497544302909510481&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=en>.

¹¹ ANDREASSI, TORELLI 1965.

¹² Cfr. <https://scholar.google.it/scholar?cites=17664496489930102274&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=it>.

¹³ DE SIMON, TORELLI 1968; TORELLI 1969.

¹⁴ Cfr. <https://scholar.google.it/scholar?cites=7394115078031924697&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=it>, <https://scholar.google.it/scholar?cites=7100427556944483533&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=it>.

Mallet-Paret, J. Mawhin, M. Nakao, G. Vidossich, M. Berti; in questa lista compaiono ancora una volta i nomi di matematici di grande valore e prestigio.

3. UNA RIFLESSIONE CONCLUSIVA

La produzione scientifica di Giovanni Torelli, pur concentrata in un numero limitato di pubblicazioni, raggiunge punte di grande qualità ed elevato valore scientifico, avendo in alcuni casi anticipato idee che sono state poi riprese e sviluppate da scuole ben più consolidate, strutturate e organizzate.

Per questo motivo, dopo essere stati apprezzati da alcuni fra i maggiori esperti nel settore quando furono pubblicati, i lavori di Giovanni Torelli e dei suoi collaboratori sono ancora ricordati a distanza di decenni, nonostante il fatto che spesso furono pubblicati su riviste non aventi grandissima diffusione, e talvolta in lingua italiana.

BIBLIOGRAFIA

ANDREASSI G., TORELLI G.

1965, «Su una equazione di tipo iperbolico non lineare», *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 35, pp. 134-147.

DE SIMON L., TORELLI G.

1968, «Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari». *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 40, pp. 380-401.

1974, «Linear second order differential equations with discontinuous coefficients in Hilbert spaces», *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, (4), 1, pp. 131-154.

1981, «First order linear partial differential equations with discontinuous coefficients», *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4), 128, pp. 325-340.

1988, «The Cauchy problem for a class of linear partial differential equations with discontinuous coefficients», *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 20, suppl., pp. 65-81.

PRODI G.

1995, *Ricordo di Giovanni Torelli*, in: S. INVERNIZZI (a cura di), «Giornate di didattica, Storia ed Epistemologia della Matematica in ricordo di Giovanni Torelli (Trieste, 29-30 agosto 1995)», Trieste, Università degli Studi di Trieste, pp. XI-XIV.

TORELLI G.

1964, «Un complemento ad un teorema di J. L. Lions sulle equazioni differenziali astratte del secondo ordine», *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 34, pp. 224-241.

1969, «Soluzioni periodiche dell'equazione non lineare $u_{tt}-u_{xx}+\varepsilon F(x,t,u)=0$ », *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 1, pp. 123-137.

SITI WEB

GOOGLE SCHOLAR

<https://scholar.google.it/scholar?cites=16625986235375120253&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=it>, sito consultato il 30.12.2019.

<https://scholar.google.it/scholar?cites=13685249022248871859&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=it>, sito consultato il 30.12.2019.

<https://scholar.google.com/scholar?cites=2497544302909510481&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=en>, sito consultato il 30.12.2019.

<https://scholar.google.it/scholar?cites=17664496489930102274&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=it>, sito consultato il 30.12.2019.

<https://scholar.google.it/scholar?cites=7394115078031924697&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=it>, sito consultato il 30.12.2019.

<https://scholar.google.it/scholar?cites=7100427556944483533&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=it>, sito consultato il 30.12.2019.

Giovanni Torelli, un uomo d'azione nel campo della didattica della matematica^{*o}

LUCIANA ZUCCHERI
CIRD, Università di Trieste
zuccheri@units.it

ABSTRACT

We illustrate the figure of the Italian mathematician Giovanni Torelli, working in Trieste from the end of the 1950s to the late 1980s, in relation to his activities in the field of mathematics education. In particular, we describe his teaching methodology in secondary school and university, his methodological motivations, his collaboration with teachers in the “Nucleo di Ricerca Didattica di Trieste” (Trieste Teaching Research Unit). Finally, some of his important initiatives in the field of secondary school teacher training are shown.

PAROLE CHIAVE

DIDATTICA DELLA MATEMATICA / MATHEMATICS EDUCATION; SCUOLA SECONDARIA / SECONDARY SCHOOL; UNIVERSITÀ / UNIVERSITY; FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI / TEACHER EDUCATION; GIOVANNI TORELLI / GIOVANNI TORELLI.

Al mio Maestro

1. INTRODUZIONE. COME POTREI DIMENTICARE GIOVANNI TORELLI?

Giovanni Torelli¹, per quanto riguarda la didattica, è stato *un uomo d'azione, più che di scrittura*. Non ha lasciato molte cose scritte. In particolare, due suoi contributi scritti costituiscono l'introduzione agli atti di Convegni da lui stesso promossi: *Computer e didattica* (Lignano Sabbiadoro, 2-4 maggio 1985)² e *Matematica e sue applicazioni nell'insegnamento della Scuola secondaria (11-19 anni)* (Marina di Aurisina, Trieste, 27-29

* Title: *Giovanni Torelli, a man of action in the field of Mathematics Education.*

^o Il presente contributo trae origine dalla relazione presentata dall'autrice nell'incontro *Giovanni Torelli 1988-2018, il ricordo di un matematico appassionato* (Università di Trieste, 20 dicembre 2018).

¹ Cenni biografici su Giovanni Torelli si trovano in TORELLI L. 2019 (in questo stesso numero della rivista).

² TORELLI 1985a.

ottobre 1988)³. Un altro contributo scritto di Torelli è il suo intervento pubblicato negli atti del Convegno UMI-CIIM *Nono convegno sull'insegnamento della matematica: l'aggiornamento* (Rimini, 25-27 ottobre 1984)⁴.

Sono stata allieva di Giovanni Torelli al Liceo scientifico statale “G. Oberdan” di Trieste e, in seguito, all’Università di Trieste, dove ho frequentato il suo corso di Storia della Matematica. È stato il relatore della mia tesi di laurea, incentrata su un argomento di Analisi Matematica (titolo della tesi: *Su equazioni differenziali a derivate parziali con coefficienti discontinui*).

Ho lavorato con lui all’Università, dapprima come borsista CNR e poi come ricercatore universitario, svolgendo in un primo periodo anche esercitazioni per i suoi corsi di insegnamento (in particolare, *Istituzioni di matematiche 2* per il Corso di laurea in Chimica). Soprattutto, ho svolto ricerche in didattica della matematica nell’ambito del *Nucleo di Ricerca Didattica* da lui diretto e ho collaborato con lui in varie iniziative di formazione docenti.

In base a tutte queste esperienze di vita vissuta, mi sento di poter tratteggiare un quadro dei rapporti di Giovanni Torelli con la didattica della matematica, che non si limiti a una mera descrizione della sua attività accademica in questo campo.

2. GIOVANNI TORELLI, DOCENTE DI LICEO SCIENTIFICO

Inizierò col dare alcuni esempi di come Giovanni Torelli insegnava nel triennio di Liceo scientifico, negli anni in cui ero sua allieva (1970-1973).

Il suo stile d’insegnamento era molto amichevole e cercava di coinvolgere gli studenti in un *processo costruttivo*. Frase di rito, quando iniziava un nuovo argomento, era: «Il titolo del giallo oggi è...». Procedeva quindi a spiegare i nuovi argomenti, richiedendoci però di partecipare. A tale scopo, ci poneva domande e ci stimolava alla formulazione di congetture. Puntava, quindi, più alla costruzione dei concetti che alla loro semplice descrizione.

³ TORELLI 1989.

⁴ TORELLI 1985b.

Usava il libro di testo (una vecchia edizione dello ZWIRNER⁵) solo per gli esercizi - a volte si trattava di una vera e propria caccia all'errore, perché i risultati indicati nel testo non erano corretti o completi. Per la teoria, studiavamo dagli appunti presi a lezione, perché Torelli ci proponeva gli argomenti con un linguaggio diverso e più moderno, rispetto a quello del libro. Ad esempio, aveva trattato la teoria dei limiti con nozioni topologiche, basandosi sul concetto di *intorno*.

Era innovativo nella scelta degli argomenti. Ci aveva, infatti, proposto temi ancora non contemplati dai programmi ministeriali (all'epoca erano quelli della *Riforma Gentile*, in pratica programmi d'esame), come le prime nozioni di calcolo delle probabilità, di calcolo combinatorio e di teoria degli insiemi.

Era innovativo nella distribuzione degli argomenti previsti nel curriculum. In particolare, aveva anticipato l'introduzione del concetto di limite al terz'anno e quello di derivata al quarto.

Che concezione aveva della matematica? Certamente di tipo *sostanziale* e non *formale*. Infatti, teneva molto a farci apprendere i concetti e non dava molta importanza al formalismo di per sé, anche se esigeva correttezza nei calcoli e nella forma. Inoltre, non amava il tecnicismo. La sua affermazione di rito prima di iniziare una noiosa procedura di calcolo era: «Si tratta di bassa macelleria». Evitava di proporci esercizi ripetitivi esageratamente complicati (come quelle da lui indicate come «espressioni a quattro piani»).

Per dare un esempio di quanto ci tenesse a far comprendere i concetti, dirò di come ci ha insegnato il concetto di derivata di una funzione.

Eravamo alla fine del secondo quadrimestre del quarto anno. Ci insegnò che per calcolare la derivata di una funzione in un punto occorre calcolare il *limite* (se esiste finito) del *rapporto incrementale* della funzione in quel punto. E ci obbligò fino alla fine dell'anno a fare ogni volta questo calcolo, per svolgere gli esercizi.

All'epoca, miei amici che frequentavano il quarto anno dell'Istituto tecnico

⁵ ZWIRNER 1969.

industriale mi avevano assicurato dell'esistenza di formule immediate e si erano stupiti di tutto il lavoro che dovevo fare per calcolare, ad esempio, la derivata di x^2 , che loro calcolavano facilmente a mente (in questo caso, si tratta di $2x$), anche se non sapevano bene spiegarmi quale ne fosse il significato. Noi invece dovemmo aspettare la fine dell'estate e, nell'anno scolastico successivo, finalmente Giovanni ci fece imparare le formule da applicare per calcolare le derivate delle funzioni elementari.



Figura 1. Giovanni Torelli in una foto scattata al Liceo "G. Oberdan" di Trieste.

Dal punto di vista metodologico, a volte ci faceva lavorare in gruppi, soprattutto per la preparazione di relazioni per il corso di fisica, che faceva capo alla sua cattedra di insegnamento. In tal caso, eravamo noi studenti a fare lezione in classe sull'argomento studiato. Credo che tale argomento fosse quello che ci rimaneva impresso nella mente più a lungo termine. In questo modo eravamo anche portati a sviluppare le nostre capacità comunicative.

Un'altra sua innovazione in ambito scolastico fu quella di organizzare all'interno del nostro istituto un'attività di recupero di matematica per gli studenti che ne avevano necessità. Tale attività era svolta in orario pomeridiano, volontariamente, da studenti

delle classi superiori: si trattava quindi di quello che oggi diremmo *peer tutoring*. In caso di alunni con disabilità motorie, era riuscito a trovare il modo - insieme al preside Adolfo Steindler⁶ - di far svolgere le lezioni di recupero anche a domicilio, dando un compenso agli allievi-insegnanti. Lo svolgimento delle lezioni di recupero era utile non solo ai destinatari delle stesse, ma anche ai loro “docenti”, che spiegando ai compagni gli argomenti di matematica, li imparavano meglio a loro volta, approfondendoli.

3. GIOVANNI TORELLI, DOCENTE UNIVERSITARIO

Le sue innovazioni didattiche non si limitarono all'insegnamento al Liceo.

All'Università di Trieste, il suo corso di *Storia della matematica* era importante per l'indirizzo didattico. Il programma comprendeva numerosi argomenti classici di storia della matematica, in particolare di geometria e analisi, che dovevano costituire il bagaglio culturale dei futuri insegnanti.

Non era una “storia dei matematici”, ma una vera *storia dello sviluppo della matematica e dei suoi metodi*. Se ne consideravano temi cruciali, come ad esempio il metodo di esaustione, l'assiomatica della geometria da Euclide a Hilbert, i “problemi classici” dell'Antichità, i primi problemi del calcolo delle variazioni.

Trattandosi di un corso finalizzato alla preparazione dei futuri insegnanti, Giovanni richiedeva agli studenti di svolgere relazioni in classe su argomenti concordati, con lo scopo di stimolarli a perfezionare le capacità comunicative.

Inoltre, era prevista un'attività di tirocinio: chi lo desiderava, poteva andare a svolgere un ciclo di lezioni in una classe di Scuola secondaria, mettendosi in contatto con un docente da lui segnalato, per concordare lo svolgimento dell'esperienza. Penso che, per tutti quelli che volevano dedicarsi con passione all'insegnamento della matematica, questa fosse un'esperienza entusiasmante. In ogni caso, si aveva la possibilità di verificare se si stava intraprendendo la strada giusta per la propria futura professione.

⁶ Adolfo Steindler, “benemerito della scuola, della cultura e dell'arte”, laureato in matematica, fu un personaggio di rilievo della cultura triestina e non solo. Il 28 maggio 2019, in occasione dei 100 anni dalla nascita, si è svolta una cerimonia in sua memoria nell'Aula Magna - a lui intitolata - del Liceo Scientifico “G. Oberdan” di Trieste, del quale fu preside dal 1969 al 1983 (cfr. SITI WEB).

Infine, nell'a. a. 1977/1978, in un'epoca in cui il computer non era ancora a disposizione di tutti, aveva ritenuto utile inserire nel programma delle proposte per l'uso di *mini calcolatori* (si trattava, all'inizio, di calcolatrici tascabili programmabili).

4. MOTIVAZIONI METODOLOGICHE E SUA FORMAZIONE DIDATTICA

Credo che Giovanni Torelli abbia ben sintetizzato le motivazioni della sua metodologia didattica esprimendo nel 1983 il seguente pensiero⁷:

La scienza, come viene insegnata oggi si presenta un po' troppo come una "verità rivelata", come scienza di "risultato" nella sua perfezione e non come travaglio di ricerca nel suo cammino faticoso.

Lo studente molto spesso viene imbottito di dati, formule, giudizi prefabbricati; sembra ridotto ad un automa e talvolta più semplicemente ancora a un registratore.

Lo spirito umano è indocile, inventivo, curioso; molto spesso lo studente si annoia e respinge tale tipo di insegnamento.

Lo studente ha bisogno di un maestro, cioè di qualcuno che partendo dal "concreto" della sua esperienza vitale di giovane, lo porti a scoprire cose nuove facendogli provare la fatica e poi la gioia della conquista.

Certamente alla formazione di Giovanni nel campo della didattica della matematica hanno contribuito tante esperienze, a cominciare dall'insegnamento ricevuto⁸, fino alla collaborazione con il gruppo di ricerca in matematica diretto da Giovanni Prodi⁹ (prima a Trieste, e dal 1963 a Pisa), senza contare la sua partecipazione a convegni nazionali e internazionali di didattica della matematica. Dagli anni '60 c'era un ribollire di nuove idee¹⁰ (che perdurò vivace in Italia fino agli anni '80), con dibattiti molto accesi che avvenivano anche nei convegni sull'insegnamento della matematica organizzati dall'Unione Matematica Italiana.

Sicuramente, però, il modo di agire di Giovanni era proprio insito nel suo DNA!

Prodi stesso, che fu artefice di un progetto innovativo di cui parlerò in seguito, nella sua relazione in ricordo di Giovanni Torelli al Convegno tenutosi a Trieste nel

⁷ TORELLI 1985a, p. 21.

⁸ A questo proposito, Torelli mi parlava di un suo insegnante, ricordandone simpatici aneddoti dai quali si capiva che questi tendeva a tenere sveglia l'attenzione degli allievi e a rinforzarne la memoria, usando termini divertenti di sua invenzione – come ad esempio "spaz-zino" per indicare un intervallo (uno "spazio", quindi) piccolo a piacere.

⁹ Giovanni Prodi, matematico italiano noto anche per le sue attività riguardanti l'insegnamento della matematica, fu molto importante per la vita professionale di Giovanni Torelli, come descritto anche in OMARI 2019 (in questo stesso numero della rivista).

¹⁰ Qualche cenno sull'argomento si può trovare in FERRARI 1978.

1995, riferendosi alla fine degli anni '60, scriveva¹¹:

Intanto [...] anche io venivo preso dai problemi concreti dell'insegnamento della matematica, la cui importanza sociale e culturale mi appariva sempre più chiaramente. Potrei dire, come io avevo attirato Giovanni sui problemi dell'analisi matematica, così lui esercitava un'indubbia influenza su di me attraendomi verso i problemi dell'insegnamento preuniversitario, e, nello stesso tempo, esercitando un prezioso ruolo di valutazione critica; [...].

Inoltre, Prodi testimonia che¹²:

[...] proprio da Torelli venne la prima idea di organizzare per la didattica della matematica dei nuclei di ricerca analoghi a quelli che, sotto l'egida del CNR, erano già sorti per le discipline matematiche tradizionali.

E, come Prodi scrisse in seguito, riferendosi all'anno 1975¹³:

Facemmo assieme la proposta al comitato per la Matematica del CNR, che l'accorse favorevolmente; sorsero così i "Nuclei di ricerca didattica" che sono tutt'ora attivi e che hanno portato molti frutti sia all'innovazione didattica nelle nostre scuole, sia alla ricerca didattica [...]

Fu così che Giovanni Prodi, negli anni Settanta, coinvolse Giovanni nel suo progetto "Matematica come scoperta"¹⁴, un percorso didattico innovativo per la Scuola secondaria superiore, che veniva sperimentato nei Nuclei di Ricerca Didattica di Pavia, Pisa e Trieste.

5. IL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI TRIESTE E LA COLLABORAZIONE DI TORELLI CON GLI INSEGNANTI

Il *Nucleo di Ricerca Didattica*, «costituitosi a Trieste nell'autunno [del 1975], ed approvato da parte del Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR) con decorrenza 1 gennaio 1976»¹⁵, iniziò quindi la sua attività con finanziamento del CNR.

Inizialmente ne era direttore Mario Dolcher e fungevano da condirettori Dino Dal Maso e Giovanni Torelli¹⁶.

¹¹ PRODI 1995, p. XIII.

¹² PRODI 1989, dal testo originale della commemorazione di Giovanni Torelli inviata a A. Volčič; la commemorazione fu pubblicata poi in formato ridotto nel NUMI. Lo stesso concetto viene ripreso in PRODI 1995, pp. XII-XIII.

¹³ PRODI 1995, pp. XII-XIII.

¹⁴ FERRARI 1987.

¹⁵ DOLCHER 1976.

¹⁶ I matematici Mario Dolcher e Dino dal Maso, entrambi operanti nell'Università di Trieste, condividevano con Torelli l'interesse per la didattica della matematica.

Esaurita dopo qualche anno la sperimentazione del *Progetto Prodi*, si continuò con altre attività di ricerca, sperimentazione e aggiornamento degli insegnanti (ad esempio, su Probabilità e Statistica). Nel contempo si fondarono altre sezioni (*Scuola Elementare* e *Scuola Media Inferiore*). Giovanni Torelli rivestiva il ruolo di direttore del Nucleo e di responsabile della Sezione *Scuola Media Superiore*.

La principale caratteristica del Nucleo era il rapporto di Torelli con gli insegnanti partecipanti, che lui desiderava fosse di completa parità. Pur con ruoli diversi, ognuno contribuiva alla crescita del gruppo. Gli insegnanti erano incoraggiati a svolgere la sperimentazione in classe, ma anche a fare delle proposte originali. Compito degli universitari era di supportarli scientificamente e metodologicamente, ma nelle discussioni venivano prese in considerazione le opinioni di tutti.

Come scrive Giovanni Torelli stesso¹⁷:

Vorrei soffermarmi per un momento in generale su alcuni che si autoproclamano esperti di insegnamento della matematica: ognuno evidentemente può proclamarsi tale, se lo ritiene opportuno, però la prudenza e forse anche l'intelligenza suggeriscono che non solo la propria idea o convinzione può ritenersi "giusta". Forse anche gli altri possono avere idee non del tutto "sbagliate": ecco che viene ancora in rilievo la capacità di stare ad ascoltare, non per demolire il discorso di altri, ma per cercare di capire l'idea altrui, a qualunque livello di scuola questi appartenga. Saranno così evitati discorsi o scritti in cui si criticano, per il piacere della critica, altre persone, forse anche perché la fretta di criticare impedisce di ben comprendere ciò che altri hanno voluto dire.

Fu così che molti componenti del Nucleo, insegnanti compresi, supportati economicamente e scientificamente, parteciparono a Convegni e Seminari di didattica della matematica, svolgendo relazioni e comunicazioni. Ciò portò alla pubblicazione di numerosi contributi originali degli insegnanti stessi in pubblicazioni del Dipartimento, negli atti dei convegni, in volumi editi dal CNR e su riviste specializzate.

6. GIOVANNI TORELLI E LA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI

Giovanni Torelli si occupò della *formazione in servizio degli insegnanti* anche al di fuori del lavoro svolto con continuità nel Nucleo di Ricerca Didattica.

Tra le sue molteplici iniziative in questo settore, voglio ricordare due attività in

¹⁷ TORELLI 1989, p. 131.

particolare, che riguardano l'insegnamento nella Scuola secondaria di primo e secondo grado.

La prima, molto importante e diffusa a livello regionale, fu promossa su iniziativa di Torelli nell'ambito dell'IRRSAE Friuli-Venezia Giulia, del cui Consiglio Direttivo faceva parte. Si trattava del "Corso pluriennale di aggiornamento per insegnanti di scuola secondaria di primo e secondo grado" intitolato *Computer e Didattica*, iniziato nel 1982¹⁸. Il corso continuò per circa un decennio. Quando fu attivato dal Ministero della Pubblica Istruzione il "Piano Nazionale Informatica", le competenze di molti partecipanti al corso IRSSAE furono utilizzate per lo sviluppo di quest'ultimo a livello regionale.

Il corso *Computer e Didattica* prevedeva periodi di studio e di sperimentazione didattica, seguiti da momenti di riflessione in convegni residenziali, dove avveniva un confronto sui risultati raggiunti. Inizialmente era rivolto ai soli insegnanti di matematica e di altre materie scientifiche, ma già dopo tre anni (nel 1985) la platea si era ampliata agli insegnanti di discipline umanistiche. A questo corso contribuirono numerosi collaboratori del Nucleo di Ricerca Didattica di Trieste (universitari e non), sia in qualità di *formatori*, sia come membri della relativa *Commissione tecnico scientifica*¹⁹.

Nei primi tempi, erano disponibili (e avvicinabili economicamente dall'utente medio) solo le calcolatrici tascabili, programmabili e non, e gli home computer come lo *Spectrum* e il *Commodore*, poi timidamente si affacciarono alla ribalta i primi veri e propri personal computer, dal prezzo allora proibitivo, non solo per i docenti.

Si trattava ancora, quindi, di una delle idee pioneristiche di Giovanni Torelli, che aveva intravisto, da una parte, i pericoli insiti nell'uso acritico dei mezzi informatici e, dall'altra, le numerose possibilità offerte alla didattica - della matematica, ma non solo di questa - da un uso consapevole di tali strumenti, ivi compresa l'occasione di stimolare gli insegnanti a un aggiornamento continuo e a lavorare in gruppi di colleghi²⁰.

¹⁸ Per una descrizione delle prime attività cfr. ZUCCHERI 1983.

¹⁹ Cfr. TORELLI 1985b e NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI TRIESTE 1985.

²⁰ Cfr. TORELLI 1985a, 1985b.

La seconda iniziativa di Giovanni Torelli che voglio qui ricordare è l'ideazione e la realizzazione del Convegno intitolato *Matematica e sue applicazioni nell'insegnamento della Scuola secondaria (11-19 anni)*, tenutosi a Marina di Aurisina (Trieste), nell'ottobre 1988. Il sottotitolo del convegno era *Esperienze, proposte, lavori interdisciplinari e confronti internazionali, particolarmente nell'ambito della Comunità Alpe Adria*.



Figura 2. Giovanni Torelli al Convegno di Marina di Aurisina (Trieste) nel 1988.

L'idea era quella di fare il punto delle attività svolte fino ad allora - lasciando come sempre la parola agli insegnanti e ai ricercatori che le avevano realizzate - e di confrontarsi in campo nazionale e internazionale, in primo luogo con i Paesi più vicini alla nostra regione.

Oltre a tanti insegnanti del Friuli Venezia Giulia, ma anche di altre regioni italiane, parteciparono numerosi studiosi di didattica della matematica italiani - tra cui alcuni divenuti in seguito nomi di spicco della didattica internazionale - e altri studiosi provenienti da paesi mitteleuropei.

7. UN COMMENTO CONCLUSIVO

Quale sarebbe stata la prossima mossa di Giovanni Torelli, dopo il Convegno di Marina di Aurisina? Non lo sapremo mai. Ci lasciò improvvisamente dopo meno di

due mesi, il 20 dicembre di quello stesso anno. Ma, da vero *maestro* (nel senso che lui stesso dava a questo termine) ci aveva insegnato a camminare con le nostre gambe, e così abbiamo cercato di fare.

Sono sicura che Giovanni Torelli ha lasciato un segno molto profondo in tutti quelli che hanno avuto la fortuna di conoscerlo e ancor più in tutti quelli che lo hanno seguito sulla strada che ha tracciato. Per questo è stato ricordato ancora una volta, a trent'anni dalla sua scomparsa, in un incontro a lui dedicato, svoltosi il 20 dicembre 2018 nel Dipartimento di Matematica e Geoscienze dell'Università di Trieste²¹.

In particolare, io lo ricordo con riconoscenza e affetto.

BIBLIOGRAFIA

FERRARI M.

1978, «Matematica come scoperta: un progetto per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori», *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 1 (2), pp. 26-39.

NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI TRIESTE

1985, *Trieste Nucleo di ricerca didattica*, in A. M. MARIOTTI (a cura di), *Nono convegno sull'insegnamento della matematica: l'aggiornamento* (Rimini, 25-26-27 ottobre 1984), *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana*, supplemento al numero 5 (maggio 1985), pp. 198-203.

OMARI P.

2019, «Giovanni Torelli, un matematico appassionato: il profilo scientifico, in breve», *QuaderniCird*, n. 9, pp. 14-23.

PRODI G.

1995, *Ricordo di Giovanni Torelli*, in S. INVERNIZZI (a cura di), *Giornate di didattica, Storia ed Epistemologia della Matematica in ricordo di Giovanni Torelli* (Trieste, 29-30 agosto 1995), Trieste, Università degli Studi di Trieste, pp. XI-XIV.

TORELLI G.

1985a, *Come e perché un corso pluriennale sull'impiego dei computers in didattica*, in R. DE CASTRO (a cura di), *Atti del Convegno Computer e didattica* (Lignano Sabbiadoro, 2-4 maggio 1985), Trieste, IRSSAE Friuli-Venezia Giulia, pp. 21-26.

1985b, *Intervento di Giovanni Torelli*, in A. M. MARIOTTI (a cura di): *Nono convegno sull'insegnamento della matematica: l'aggiornamento* (Rimini, 25-26-27 ottobre 1984), *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana*, supplemento al numero 5 (maggio 1985), pp. 52-55.

1989 (postumo), *Obiettivi e finalità del Convegno* (dalla relazione introduttiva di Giovanni Torelli), in L. ZUCCHERI (a cura di), *Atti del Convegno Matematica e sue Applicazioni nell'Insegnamento della Scuola*

²¹ Per la cronaca dell'evento, cfr. in questo stesso numero della rivista la sezione *Notizie*.

Secondaria (11-19 anni). Esperienze, proposte, lavori interdisciplinari e confronti internazionali, particolarmente nell'ambito della Comunità Alpe Adria (Marina di Aurisina, Trieste, 27-28-29 ottobre 1988). Parte I, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 12 (2), pp. 129-133.

TORELLI L.

2019, «Giovanni Torelli: sono passati trent'anni», *QuaderniCird*, n. 19, pp. 10-13.

ZUCCHERI L.

1983, *L'impiego dei calcolatori*, Bollettino IRRSAE Friuli-Venezia Giulia, 1983 (1).

ZWIRNER G.

1969, *Complementi di algebra e nozioni di analisi matematica per i licei scientifici*, V edizione, Padova, CEDAM.

[I testi PRODI 1995, TORELLI 1985a e TORELLI 1989 citati in bibliografia si possono anche reperire nel sito della rivista *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, essendo parte integrante della Scheda n. 17 «Giovanni Torelli e la didattica della Matematica», cfr. Siti web.]

DOCUMENTI INEDITI

1975, *Elenco dei membri proposti per il Gruppo di ricerca didattica del C.N.R. a Trieste*, anno scolastico 1975-76.

DOLCHER M.

1976, *Nucleo di Ricerca Didattica di Trieste con contratto C.N.R. - U.M.I., Relazione consuntiva dell'anno scolastico 1975-1976*.

PRODI G.

1989, *Testo completo della commemorazione di Giovanni Torelli con lettera di accompagnamento inviata a A. Volčič*; pubblicata poi in formato ridotto nel Notiziario UMI.

SITI WEB

LICEO OBERDAN, TRIESTE

Adolfo "Dodo 100" Steindler,

<http://www.liceo-oberdan.edu.it/pvw/app/default/pvw_sito.php?sede_codice=TSL0002&page=2199720>, sito consultato l'8/12/2019.

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

Giovanni Torelli e la didattica della Matematica,

Scheda n. 17 (di Lucchini G.), Vol. 2015 (5), Sezione "Per non dimenticare",

<<http://www.centromorin.it/scrivi/crdm.pdf?c=76961>>, sito consultato l'8/12/2019.

Seconda parte

Come contraddirsi rimanendo coerenti: il caso della logica fuzzy^{*o}

ANDREA SGARRO
 Dipartimento di Matematica e Geoscienze
 Università di Trieste
 sgarro@units.it

ABSTRACT

The logic of natural languages, those we speak, appears to be definitely more flexible than Aristotle's zero-one logic. Is this a weakness or a strength? Fuzzy logic, which mimics natural languages, supports the second alternative. Not only is it successfully used in Artificial Intelligence AI, but it has also brought a remarkable contribution to our "philosophical comprehension" of how human inference and decision-making work. In this paper we discuss the reason why flexible logical tools strengthen the way in which computers work and "think".

PAROLE CHIAVE

LOGICA SFOCATA / FUZZY LOGIC; LOGICA NATURALE / NATURAL LOGIC.

1. BIANCO, NERO E GRIGIO

Il principio di *non contraddizione*, o il suo "duale", il *tertium non datur*, appaiono come la base incrollabile su cui si regge la logica. Ma è davvero così?

Vediamo di chiarire. Sia P una proposizione che può essere vera o falsa, ad esempio «7 è un numero primo», la cui negazione¹ \bar{P} recita: «7 è un numero composto». La proposizione P è ovviamente vera, mentre la sua negazione \bar{P} è altrettanto ovviamente falsa. Il principio di non contraddizione afferma che una proposizione e la sua negazione non possono essere entrambe vere, quello del *tertium non datur* che

* Title: *How to contradict oneself by remaining coherent: the case of fuzzy logic.*

^o Il presente contributo trae origine da un seminario tenuto dall'autore nell'ambito del Programma di Matematica (edizione a. a. 2018-19) proposto agli insegnanti dal Polo di Trieste del Progetto "I Lincei per una nuova didattica nella scuola: una rete nazionale"; cfr. <<https://www.linceiscuola.it/trieste/>>.

¹ La soprlineatura indica negazione. Nella seconda sezione ci sono alcuni chiarimenti di logica che nella prima vengono dati per scontati al solo fine di non rallentare l'esposizione.

o è vera la P o è vera la sua negazione \bar{P} , non ci sono alternative terze. Se vogliamo usare i simboli della logica, introduciamo, oltre alla negazione, gli operatori logici di disgiunzione \vee e quello di congiunzione \wedge . Il primo dà luogo a $P \vee Q$, proposizione composta a partire da P e da Q che è vera quando almeno una delle due fra P e Q lo è (gli informatici scriverebbero da P OR Q , OR inclusivo e non esclusivo, in latino *vel* e non *aut*); il secondo produce la proposizione composta $P \wedge Q$ (sia la P sia la Q devono essere entrambe vere, P AND Q per gli informatici). Il principio di non contraddizione afferma che la proposizione composta $P \wedge \bar{P}$ è appunto una *contraddizione*, ossia è sempre falsa indipendentemente dal valore logico della P , vero o falso che sia, mentre per il *tertium non datur* la proposizione composta $P \vee \bar{P}$ è una *tautologia*, ossia è sempre vera qualunque sia il valore logico della P . Se usiamo i due interi (i due *bit*) 0 e 1 per codificare falso e vero, 0=falso, 1=vero, il bit 0 compete alla $P \wedge \bar{P}$, mentre il bit 1 compete a $P \vee \bar{P}$.

Supponiamo invece che la proposizione P sia «Maria è molto alta», cui qualcuno potrebbe replicare obiettando: «Ma no, Maria è altina, non è poi così alta». Siamo passati dalla matematica alla vita di ogni giorno, dalle formule e dai formalismi al linguaggio comune, naturale, per essere più specifici alla lingua italiana. È proprio servendoci della lingua, pur nella sua vaghezza, che noi ragioniamo, ci comportiamo nella maniera più *logica* possibile e magari otteniamo risultati straordinari che l'intelligenza artificiale dei *computer* può solo invidiarci. Nella fattispecie l'interlocutore obietta che la proposizione sull'altezza di Maria è quasi vera, ma non del tutto, il suo valore logico è solo *vicino* a 1, è quasi 1. Sorge dunque il bisogno di valori logici intermedi fra 0 e 1, visto che nella vita reale non ci sono solo il bianco e il nero: nel nostro modo di parlare, di ragionare e di trarre delle conclusioni operative (ad esempio che Maria potrebbe giocare in una squadra di pallacanestro) ci sono tutte le sfumature di grigio.

Nelle logiche multivalenti (e noi ci occuperemo nello specifico della logica *fuzzy*, sfumata, sfocata) i valori logici possono essere numeri reali arbitrari dell'intervallo $[0,1]$. Rimane aperto il problema, tutt'altro che secondario, di come questi valori vengano scelti. Potremmo decidere che si tratta di codifiche numeriche di attributi linguistici, ad esempio 0 =*assolutamente falso* dal punto di vista dell'*agente* che esprime il giudizio in base a quello che è il suo *stato di conoscenze* corrente, $1/3$ =*presumibilmente falso*, $2/3$ =*presumibilmente vero*, 1 =*assolutamente vero*; su questo punto delicato dovremo ritornare. Il valore logico $1/2$ descrive una situazione ambigua, in cui l'*agente* non sa proprio che pesci pigliare.

Nella logica binaria, zero-uno, quella che non conosce il grigio, gli operatori logici vengono descritti mediante tabelline di verità: per la disgiunzione *oppure*, se u e v sono i valori logici delle due proposizioni P e Q , il valore logico di $P \vee Q$ è 0 se $u = v = 0$, altrimenti è 1 (basta che una delle due sia vera), mentre per la congiunzione *e anche* il valore logico di $P \wedge Q$ è 1 se $u = v = 1$ (occorre che entrambe siano vere), altrimenti è 0 . In altre parole nel caso della disgiunzione il valore logico di $P \vee Q$ è il massimo dei due valori logici u e v , mentre nel caso della congiunzione è il minimo; nel caso della negazione di P (o di Q) il bit si inverte, in altre parole il valore logico diventa $1 - u$ per \bar{P} e $1 - v$ per \bar{Q} . Sono proprio queste le scelte che si fanno nella logica *fuzzy*: se u e v sono due valori² logici (due numeri reali fra 0 e 1), $u \vee v = \max[u, v]$, $u \wedge v = \min[u, v]$, $\bar{u} = 1 - u$.

Nella logica binaria, quella più paludata, vale tutta una serie di proprietà e di regole di calcolo, come le due regole di de Morgan: la negazione di una disgiunzione è la congiunzione delle due negazioni $\overline{P \vee Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$ e la sua "duale" $\overline{P \wedge Q} = \bar{P} \vee \bar{Q}$. Tali proprietà in buona parte si "esportano" alla logica *fuzzy* (ne parliamo nella seconda sezione) e all'algebra dei suoi operatori logici, ma ci sono due importanti,

² Spesso gli stessi simboli \vee , \wedge e soprallineatura indicano sia operazioni logiche sia le operazioni aritmetiche di massimo, di minimo e di complementazione a 1: la confusione in questo caso è proficua.

anzi drammatiche, eccezioni. Della proposizione $P \vee \bar{P}$ tutto quello che si può dire è che il suo valore logico è almeno $1/2$ (lo si ottiene quando la P è totalmente ambigua, con valore logico $1/2$), mentre il valore logico della $P \wedge \bar{P}$ è al più $1/2$, e lo si ottiene nello stesso caso di totale ambiguità. In altre parole: cadono sia il principio di non contraddizione sia il *tertium non datur*!

Per evitare una simile sciagura forse dovremmo sostituire gli operatori logici. Jan Łukasiewicz (1878-1956), il padre delle logiche multivalenti, aveva proposto la disgiunzione additiva “troncata” $u \sqcup v = \min[u + v, 1]$: i due valori logici vengono sommati e il risultato, se supera 1, viene appunto “troncato” a 1. Per conservare le preziose proprietà di De Morgan, i calcoli mostrano che bisogna definire la nuova congiunzione al modo seguente: $u \sqcap v = \max[u + v - 1, 0]$. È facile controllare, come si mostra nella prossima sezione, che le definizioni di Łukasiewicz³ recuperano sia il principio di non contraddizione sia il *tertium non datur*: $P \sqcap \bar{P}$ è una contraddizione, $P \sqcup \bar{P}$ è una tautologia. Tutto ciò è molto formale ma talmente irrinunciabili sono i due principi che la tentazione di imboccare la nuova strada è forte. In realtà, una volta cambiato paradigma, altre catastrofi sono in agguato. Si pensi alle due proprietà “irrinunciabili” di idempotenza $u \vee u = u$, $u \wedge u = u$, entrambe dimostrabilmente vere⁴ nella logica fuzzy. Purtroppo con le proposte di Łukasiewicz cadono entrambe: se $0 < u < 1/2$ si ha $u \sqcup v = 2u \neq u$, se $1/2 < u < 1$ si ha $u \sqcap u = 2u - 1 \neq u$. Vediamo di essere meno formali e di ritornare al linguaggio umano. In una giornata così così sono davvero inconciliabili due proposizioni come «Oggi è una bella giornata» e la sua negazione «Oggi è una brutta giornata»? Magari abbiamo appena replicato: «Bello, oggi? Sì, fino a un certo punto», il che implica che alla congiunzione logica fra proposizione e sua negazione noi di fatto attribuiamo un

³ ŁUKASIEWICZ 2003.

⁴ In termini forse più adeguati: le due proposizioni composte $P \vee \bar{P}$ e $P \wedge \bar{P}$ hanno lo stesso valore logico della proposizione semplice P ; si riveda la nota 3.

grado di verità positivo, magari $1/2$ se le condizioni meteorologiche sono “totalmente ambigue”. L’intelligenza artificiale ha bisogno di copiare o perfino scimmiettare il nostro modo molto umano di ragionare, ed è per questo che la logica *fuzzy*, così efficace nella gestione di affermazioni *vaghe*, ha un tale successo sia “filosofico” sia applicativo: le “debolezze” del linguaggio naturale, vere o presunte che siano, diventano il suo punto di forza.

Rimane aperto il problema di come “numerizzare” i nostri giudizi verbali. Nessuno è in grado di dare una risposta convincente, esauriente e univoca, ma ciò non basta per dichiarare superflua la logica *fuzzy*. Si pensi a una situazione vitale, quella della scuola. Che cosa sono i voti fra 0 e 10, una volta “ricalibrati” fra 0 e 1, se non valori logici in una logica multivalente? Se Maria ha preso 10 in latino e 8 in matematica le due proposizioni «Maria sa il latino» e «Maria sa la matematica» hanno grado di verità o valore logico 1 e 0.8 se solo abbiamo il coraggio di fare il passo che ci fa varcare la soglia della logica formale. E se la condizione per venir promossi è il 6 in tutte le materie, è all’operazione logica di congiunzione *fuzzy* che facciamo ricorso: conta il minimo dei voti, ossia il minimo dei valori logici. La promozione sarà assai importante nella vita di Maria, le conseguenze delle scelte numeriche, delle “numerizzazioni”, sono destinate ad avere un peso non solo nella vita privata di Maria ma di riflesso in tutta la vita sociale. Come il borghese di Molière che faceva prosa senza saperlo, gli insegnanti (gli *agenti* che esprimono il giudizio in base alla loro competenza) hanno da sempre fatto logica *fuzzy*! Le loro “numerizzazioni” possono anche essere (entro certi limiti) arbitrarie, ma sono *operativamente* necessarie per un corretto funzionamento della “macchina” sociale.

Il punto di avvio della *fuzziness* è un celebre articolo del 1965, inizialmente assai osteggiato dalla comunità scientifica, dovuto a Lotfi Asker Zadeh (1921-2017)⁵: il successo e i riconoscimenti sono andati via via crescendo, e il ruolo della sua logica

⁵ ZADEH 1965.

verbale, linguistica nelle applicazioni tecnologiche è ormai irrinunciabile: la logica del vago, è ideale nella costruzione di apparecchiature “intelligenti”, lavatrici, condizionatori d’aria, macchine fotografiche, ma anche in grossi impianti industriali; il controllo della metropolitana intelligente di Sendai in Giappone del 1988 è il primo clamoroso successo che fece scalpore e convinse gli scettici⁶. Il capitolo del *controllo fuzzy*, basato appunto sulla logica *fuzzy*, è ormai un solido pilastro dei sistemi esperti che l’intelligenza artificiale ci offre.

Come il calcolo delle probabilità, anche la logica *fuzzy* fa parte di quel ramo della matematica applicata e dell’intelligenza artificiale che noi, forse un po’ pretenziosamente, chiamiamo *gestione delle conoscenze incomplete (incomplete knowledge management)*. Le ricadute sono non solo tecnologiche, ma anche filosofiche: se il calcolo delle probabilità riesce a gestire bene quel particolare aspetto delle conoscenze incomplete che è l’incertezza, si rivela non all’altezza in altre situazioni, come appunto nella gestione della *vaghezza*. Ciò peraltro non esaurisce le sfaccettature di cui la gestione delle conoscenze incomplete deve occuparsi: oltre al calcolo delle probabilità più tradizionale e alla logica *fuzzy* sono oggi disponibili al ricercatore altri strumenti matematici affascinanti e profondi, oltre che utili, come la *teoria dell’attestabilità* o la *teoria delle probabilità imprecise*⁷.

2. LA BOTTE MEZZA PIENA

A priori l’algebra che ci interessa è un’algebra di proposizioni: di fatto, quando formiamo un’espressione logica che coinvolga proposizioni e operatori logici come disgiunzioni, congiunzioni e negazioni, il valore logico del risultato dipende *solo ed esclusivamente* dal valore logico delle proposizioni su cui stiamo operando, e non dalle proposizioni in sé. In altre parole, l’algebra diventa un’algebra aritmetica su numeri dell’intervallo $[0,1]$. Nella logica binaria e nella logica *fuzzy* disgiunzioni OR,

⁶ Cfr. KOSKO 2000; SGARRO, FRANZOI (cfr. Siti web).

⁷ Cfr. SGARRO, FRANZOI 2016.

congiunzioni AND e negazioni NOT si realizzano mediante massimi, minimi e complementazioni a 1. Se la proposizione composta è $(P \vee \bar{Q}) \wedge \bar{R}$ e se i valori logici di P, Q, R sono i numeri u, v, w , il valore logico della proposizione composta vale $\min[(\max[u, 1 - v]), 1 - w]$.

È immediato dimostrare che per disgiunzione e congiunzione vigono proprietà come l'associatività, la commutatività e l'idempotenza; per dire:

$$u \vee v = \max[u, v] = \max[v, u] = v \vee u$$

$$u \vee u = \max[u, u] = u.$$

Nel caso delle formule di De Morgan si ha:

$$\overline{u \vee v} = 1 - \max[u, v] = \min[1 - u, 1 - v] = \bar{u} \wedge \bar{v}$$

Analoghi sono i calcoli per la formula duale.

In presenza di un valore logico u strettamente compreso fra 0 e 1 cadono sia il principio di non contraddizione che il *tertium non datur*, visto che i due numeri u e $1 - u$ sono entrambi diversi da 0 e da 1. Passiamo agli operatori di Łukasiewicz, non senza notare che se i valori logici coinvolti sono binari, zero e uno, nulla cambia (entrambe le logiche, quella fuzzy e quella di Łukasiewicz, generalizzano la logica binaria in bianco e nero). Stavolta, pensando ad esempio al *tertium non datur*:

$$u \sqcup (1 - u) = \max[u + (1 - u), 1] = \max[1, 1] = 1.$$

La tentazione sarebbe quella di pescare due nuovi operatori che non creino problemi né con i due sommi principi né con le due proprietà di idempotenza: ahinoi, neanche in questo caso si può avere la botte piena e la moglie ubriaca. Supponiamo di assegnare la disgiunzione ∇ , la congiunzione Δ e una proposizione P di valore logico $1/2$. Supponiamo che per i nuovi operatori valgano le proprietà di idempotenza, il principio di non contraddizione e quello del *tertium non datur*; oltre a questo ci accontentiamo di ben poco: ipotizziamo semplicemente che la negazione di $1/2$ sia ancora $1/2$. Tanto basta per giungere a una contraddizione (a un'affermazione di valore logico rigorosamente 0).

Si ha:

$$1/2 = u =^{(1)} u \nabla u =^{(2)} u \nabla (1 - u) =^{(3)} 1$$

Si noti che abbiamo usato solo una delle due idempotenze al punto ⁽¹⁾, e il *tertium non datur* al punto ⁽³⁾; in maniera analoga avremmo potuto limitarci ad usare l'altra idempotenza e la non contraddizione: $1/2 = u = u \Delta u = u \Delta (1 - u) = 0$; per il punto ⁽²⁾ si riveda l'osservazione che apre la sezione: P e \bar{P} hanno lo stesso identico valore logico $1/2$. Le logiche multivalenti sono dunque condannate a essere “scandalose”, il che la dice lunga sul nostro straordinario e molto umano modo di ragionare⁸.

3. COMMENTO CONCLUSIVO

Noi matematici condividiamo una “deformazione professionale”, peraltro lodevole, quella di essere fermamente convinti che studiar matematica ripulisca il linguaggio ordinario delle sue imprecisioni e di conseguenza “lo migliori”. La logica fuzzy non contraddice questa convinzione: è vero che si occupa di vaghezza, ma la vaghezza viene formalizzata e rinchiusa nelle inflessibili tenaglie dell'esattezza matematica, proprio come succede con l'incertezza e il calcolo delle probabilità.

Rimane il fatto che la logica fuzzy, e più in generale le logiche multivalenti, si appoggiano alla logica naturale, pur nelle sue debolezze, con grande rispetto, non per migliorarla ma per trarne ispirazione: in fin dei conti, è il ragionamento naturale, quello che l'intelligenza artificiale si sforza di emulare, che sta alla base del successo evolutivo dell'*Homo sapiens*.

BIBLIOGRAFIA

KOSKO B.

2000, *Il fuzzy-pensiero. Teoria e applicazioni della logica fuzzy*, Milano, Baldini Castoldi.

ŁUKASIEWICZ J.

2003, *Del principio di non contraddizione in Aristotele*, Macerata, Quodlibet.

⁸ Cfr. KOSKO 2000; SGARRO, FRANZOI (Siti web); SGARRO, FRANZOI 2016.

SGARRO A., FRANZOI L.

2016, «Logica e illogica delle lingue naturali: il caso della consecutio temporum», *QuaderniCIRD*, 13, pp. 26-38, scaricabile all'indirizzo web: <<http://hdl.handle.net/10077/13814>>.

ZADEH L. A.

1965, «Fuzzy Sets», *Information and Control*, 8, pp. 338-353.

SITI WEB

SGARRO A., FRANZOI L.

Soft computing e logica fuzzy

<https://www.dmi.units.it/~sgarro/livre_flou.pdf>, sito consultato il 23.9.2019.

Spunti e riflessioni per l'insegnamento del calcolo delle probabilità^{*o}

ALJOŠA VOLČIČ
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università della Calabria
volcic@unical.it

ABSTRACT

Quoting Felix Klein and Efraim Fischbein we underline the difficulties of introducing the teaching of probability at any level. We then compare two alternatives: we can either study first descriptive statistics, so the first steps in probability can be motivated by suggestive examples (as proposed by Carla Rossi) or we can begin with simple problems from classical probability approach (as proposed by Giovanni Prodi). Following this second suggestion, the basic concepts of probability are introduced through the correspondence between Fermat and Pascal. We also discuss d'Alembert's mistake, introduce the notions of conditional probability and independence, analyse Weaver's three-cards-game and an experiment by Ruma Falk. Finally we discuss some delicate aspects of independence.

PAROLE CHIAVE

STATISTICA DESCRITTIVA / DESCRIPTIVE STATISTICS; PROBABILITÀ CLASSICA / CLASSICAL PROBABILITY; IL PROBLEMA DELLA DIVISIONE / THE PROBLEM OF POINTS; ERRORE DI D'ALEMBERT / D'ALEMBERT'S MISTAKE; PARADOSSO DI WEAVER / WEAVER'S PARADOX; ESPERIMENTO DI RUMA / RUMA'S EXPERIMENT.

1. INTRODUZIONE

Questo articolo è una rielaborazione della conferenza che ho tenuto a Trieste il 23 novembre 2018 nell'ambito del Progetto *I Lincei per una nuova didattica nella scuola: una rete nazionale*. Il titolo della conferenza era "Qualche idea sull'insegnamento della probabilità tra la scuola secondaria di primo e quella di secondo grado".

Ringrazio gli organizzatori per avermi offerto l'occasione di utilizzare, nell'ambito di questo

* *Title: Some suggestions and considerations concerning teaching of probability.*

^o Il presente contributo trae origine da un seminario tenuto dall'autore nell'ambito del Programma di Matematica (edizione a. a. 2018-19) proposto agli insegnanti dal Polo di Trieste del Progetto "I Lincei per una nuova didattica nella scuola: una rete nazionale"; cfr. <<https://www.linceiscuola.it/trieste/>>.

tema, materiale e riflessioni che ho accumulato in anni di insegnamento di questa materia. Il grande matematico Felix Klein (1849-1925), famoso per il suo “Programma di Erlangen”¹, si dedicò anche con grande impegno all’insegnamento. A partire dal 1908 pubblicò un’opera in tre volumi dal titolo *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Matematica elementare dal punto di vista superiore). Nell’introduzione al primo volume egli enunciò quella che chiamava la “doppia discontinuità”, che era descritta sostanzialmente come segue²:

Una matricola di matematica si confronta all’università con problemi dei quali non si è occupato a scuola. Dopo aver finito l’università, e diventato a sua volta insegnante, ci si aspetta che insegni la matematica tradizionale con la quale non si è confrontato all’università. Pertanto, egli insegna la matematica come gli è stata insegnata alcuni anni prima e i suoi studi universitari rimangono solamente un ricordo più o meno piacevole che non influisce sul suo insegnamento.

Le cose sono sicuramente cambiate in tutti questi anni, ma l’analisi di Klein rimane sostanzialmente corretta, poiché l’università non contribuisce a sufficienza e con continuità alla formazione dei futuri insegnanti. A questo va aggiunto che anche l’aggiornamento degli insegnanti è discontinuo e non riesce a raggiungere tutti gli interessati.

In Italia, uno dei programmi di aggiornamento degli insegnanti che ha avuto maggior diffusione a livello nazionale è stato il *Piano Nazionale Informatica*, che è nato nel 1988 ed è proseguito per molti anni. Un’informazione molto ricca in merito si trova in BAROZZI, CIARRAPICO 2003.

Ma l’aggiornamento nel settore probabilistico è un *problema nel problema*.

Il famoso psicologo (e insegnante di matematica) Efraim Fischbein (1920-1998) ha scritto che³:

[...] è indispensabile introdurre nei corsi di matematica [...] nozioni di probabilità e statistica [...] a livelli elementari dell’insegnamento [perché] il pensiero probabilistico rappresenta un approccio intellettuale ai problemi essenzialmente diverso da quello ispirato dagli schemi deterministici. [...] Non si può attendere fino all’età, diciamo, di 18-20 anni per cominciare questo tipo di educazione. A questa età, ormai, il pensiero è completamente organizzato nelle sue strutture essenziali.

¹ Con il cosiddetto “Programma di Erlangen” Klein proponeva una visione unificatrice della geometria. Per una traduzione italiana del testo cfr. KLEIN 1890.

² KLEIN 1908.

³ FISCHBEIN 1984, pp. 37-38. Si veda anche in merito FISCHBEIN 1975.

Bisognerebbe iniziare dunque abbastanza presto, ma come si può incominciare?

Bruno De Finetti (1906-1985) ha suggerito come procedere all'inizio:

Per spiegare con una analogia, osserviamo che c'è qualcosa di preliminare rispetto alla conoscenza della geometria e della fisica, come scienze, ed è la familiarità con alcune nozioni indispensabili per intenderne il senso, come la nozione di lunghezza, la nozione di peso, la nozione di temperatura; familiarità che non consiste nel saperne dare una definizione o spiegazione, ma nell'intendere concretamente, intuitivamente, inavvertitamente, cosa sia una lunghezza di 12 metri, un peso di 4 Kg, una temperatura di +21 °C.⁴

Le attuali *Indicazioni* ministeriali (che sono ispirate alle conclusioni della Commissione Brocca che ha completato i suoi lavori nel 1992) sembrano suggerire che la statistica descrittiva possa essere una buona palestra per esercitarsi con gli "oggetti" con i quali si lavora nel calcolo delle probabilità.

Carla Rossi, che ne faceva parte, ha pubblicato nel 1999 un libro⁵ intitolato *La matematica dell'incertezza* (sottotitolo: *Didattica della probabilità e della statistica*).

Il libro, che è molto ben scritto, è destinato agli insegnanti e non è certo inteso per essere adottato come libro di testo. Esso fornisce un modello di come si può compiere il percorso statistica descrittiva - probabilità - inferenza statistica.

Nella prefazione scrive:

È opportuno che la trattazione della probabilità segua il tema di statistica [...] Si inizia così a parlare di probabilità avendo già a disposizione delle motivazioni e degli esempi suggestivi [...].

Non c'è unanimità su questo punto di vista.

Anche Giovanni Prodi (1925-2010) aveva fatto parte della Commissione Brocca. Nel 1992 aveva pubblicato un libro intitolato *Metodi matematici e statistici*. In questo libro (oltre all'algebra lineare e l'analisi) compaiono la statistica descrittiva, la probabilità e la statistica inferenziale. Il libro era stato scritto per il corso di laurea in Biologia che era stato appena riformato, ma, come osservava Prodi nell'introduzione:

[...] può essere utile anche per la preparazione matematica dei laureati in Biologia [...] che aspirano ad insegnare matematica e materie scientifiche nella Scuola Media.

Prodi tiene a marcare le differenze tra la statistica descrittiva e la probabilità. Dice

⁴ DE FINETTI 1965, p. 8; sull'argomento si veda anche DE FINETTI 1990, 1992.

⁵ ROSSI 1999.

ad esempio:

[...] il valore atteso e la varianza formalmente sono definiti dalle stesse espressioni. [...] Ma si coglie la diversità [...] tenendo conto che i coefficienti p_i ... [qui] indicano delle probabilità [...] mentre nell'ambito della statistica descrittiva indicano dei pesi.⁶

A me sembra più condivisibile l'opinione di Prodi (che è compatibile con la breve citazione di De Finetti riportata prima) e non solamente per il diverso significato che le stesse parole assumono nei due contesti, ma anche perché la statistica descrittiva è una materia complessa, con metodi specifici e problemi che le sono propri.

Anche le nozioni che poi si ritrovano nella probabilità rischiano di rimanere in ombra perché giocano un ruolo secondario nell'affrontare argomenti impegnativi e focalizzati su problemi non probabilistici.

Esiste una vasta letteratura sull'apprendimento della casualità dei ragazzi a partire dall'età prescolare e fino all'età preuniversitaria e la varietà di approcci non è confinata alla dicotomia su quale degli argomenti vada trattato prima, la probabilità o la statistica descrittiva.

Uno studioso che, forse per primo, si era dedicato a questo tema già molti anni fa è il famoso psicologo svizzero Jean Piaget (1896-1980). Spesso viene ricordato come uno dei promotori dell'insegnamento della cosiddetta "matematica moderna", in particolare dell' "insiemistica", a tutti i livelli scolastici.

Per quanto riguarda la probabilità, il suo interesse era concentrato sulla capacità di comprensione dei bambini, a partire dall'età di quattro anni, del concetto di *casualità*. Anche se il suo interesse principale non era la didattica, i suoi studi sono senz'altro da tenere in considerazione.

La sua opera principale in questo campo è apparsa in Italia nel 1976, quando è stato pubblicato il suo libro *La genesi dell'idea di fortuito nel bambino*⁷.

Per quanto importanti, i suoi studi sono datati. Il volume appena citato è stato pubblicato per la prima volta in francese nel 1951 ed è basato su articoli pubblicati

⁶ PRODI 1992, pp. 214-215. Sul tema della didattica della probabilità a livello preuniversitario si veda ad es. PRODI 1991.

⁷ PIAGET 1976.

in riviste verso la fine degli anni '20 del Novecento.

Sarebbe interessante rifare quelle ricerche nella situazione attuale. Ci deve essere una bella differenza tra gli studenti di Neuchâtel di quasi un secolo fa (con i quali lavorava lui) e quelli, per dire, che frequentano oggi le scuole di Gorizia.

È curiosa la sua invenzione di un congegno che utilizzava per testare le competenze dei bambini. Si trattava di una specie di cassetto oscillante che conteneva delle palline inizialmente ordinate per colore, che poi si mescolavano ottenendo quello che lui chiamava “melange”. La sua intenzione era di vedere a che età i bambini incominciavano a capire che il disordine era irreversibile e, nel contempo, di far vedere loro, sperimentalmente, che l'ordine iniziale non si riformava.

Jean Piaget riteneva che le difficoltà che i ragazzi hanno con l'apprendimento del concetto di *casualità* siano dovute al fatto che lo sviluppo psicologico del bambino ripercorre, in miniatura, lo sviluppo storico del pensiero umano. E la probabilità è l'ultima nata tra le discipline matematiche.

Altri psicologi che si sono interessati alle peculiarità dell'apprendimento della probabilità sono il già citato Fischbein, Ruma Falk e la sua collaboratrice Maya Bar-Hillel. Tra gli italiani i nomi sono tanti e ricordo ancora una volta De Finetti e Prodi, che sono quelli che più sistematicamente si sono dedicati alla probabilità anche da un punto di vista psicologico.

In questo contesto è opportuno menzionare Amos Tversky (1937-1996) e Daniel Kahneman (1934-), quest'ultimo premio Nobel per l'economia nel 2002.

I due studiosi fecero numerosi e ingegnosi esperimenti sugli adulti, dimostrando che in certe situazioni i processi decisionali umani violavano sistematicamente alcuni principi di razionalità⁸.

Per questo motivo i loro studi risultano di grande rilevanza per l'economia matematica, nella quale l'assunzione fondamentale è che il comportamento degli “agenti” sia razionale, cioè finalizzato alla massimizzazione dell'utilità.

⁸ TVERSKY, KAHNEMAN 1974.

Alcune delle “trappole” tese alle loro cavie sono degli indovinelli probabilistici molto raffinati e ben congegnati che si sono dimostrati utili per comprendere meglio le difficoltà di apprendimento della probabilità e sono quindi interessanti per chi si occupa della didattica. In (VOLČIČ 2015) si possono trovare alcune variazioni su un problema da loro proposto.

Lo schema mentale causa-effetto è molto naturale e si sviluppa abbastanza presto. Ogni effetto “deve” avere la sua causa.

Era così nelle civiltà antiche. Una tempesta si scatenava e faceva affondare una nave perché Nettuno era arrabbiato, la caccia andava bene se Diana era soddisfatta del sacrificio fatto.

L'evento casuale era considerato un segno divino. Si lanciavano gli astragali per avere suggerimenti sulle azioni da intraprendere.

La frase di Cesare “*alea iacta est*” non vuol dire che si è fatto consigliare dai dadi per prendere la sua decisione, era troppo navigato. Ma forse era destinata ai suoi soldati per sentirsi confortati dall'approvazione divina.

D'altra parte ancora oggi sopravvive nella società cosiddetta evoluta una buona dose di “pensiero magico”. Sugli aerei, ad esempio, non esistono le file 13 e 17. Eppure non risulta che i passeggeri di quelle file siano mai stati vittime di incidenti che avessero risparmiato gli altri.

A Capodanno veniamo sommersi dagli oroscopi.

Direct Line, una compagnia di assicurazione automobilistica online, ha pubblicato uno studio che valuta il legame statistico che nel 2011 c'è stato tra il segno zodiacale dei guidatori e gli incidenti stradali. Vi raccomando cautela se vedete per strada uno del segno del Cancro! Quel segno zodiacale è risultato il più incidentato con un tasso superiore alla media del 9,43%!

Naturalmente se credessimo in queste cose e nei numeri del lotto ritardatari potremmo interrompere qui, io la scrittura e voi la lettura, e tirare fuori un mazzo di tarocchi.

Con monete, dadi, sacchetti contenenti palline colorate e/o numerate, mazzi di carte e numeri della tombola si può proporre una serie di indovinelli istruttivi. Uno dei pregi della matematica è che gli oggetti con cui si fanno gli esperimenti sono intercambiabili e ciò contribuisce a rendere il pensiero degli studenti più flessibile. In letteratura si trovano tanti “esercizi” pronti all’uso, ma quelli semplici si possono fare anche a casa. L’importante è rendersi conto che nella probabilità, come in altre parti della matematica, gli esercizi non sono fine a se stessi, ma servono per illustrare e, alle volte, introdurre i concetti.

Ad esempio (se vogliamo seguire il suggerimento di De Finetti), si può prendere un mazzo composto da tre cuori e tre picche. Si mescola e si pesca una carta. Che cosa ci possiamo aspettare? (Uno dei due semi, con la stessa probabilità).

E se rimettiamo la carta nel mazzo e rimescoliamo, alla seconda estrazione ci possiamo attendere qualcosa di diverso? (Come prima).

E se peschiamo una seconda carta senza rimettere la carta precedentemente estratta che era, mettiamo, un cuori? (Diminuisce la probabilità che si estragga un cuori). Se continuiamo a estrarre carte dal mazzo si esauriranno prima i cuori o le picche? (Stessa probabilità).

E se aggiungiamo al mazzo una (o due, o tre) carte di cuori e rifacciamo gli stessi esperimenti? Così si dovrebbe creare l’idea del più probabile e dell’ancora più probabile.

Ma incominciamo con ordine, partendo dalla nascita “ufficiale” della probabilità.

2. CARTEGGIO FERMAT-PASCAL

Un’opinione largamente condivisa è che il calcolo delle probabilità sia nato nel 1654 con una lettera che il famoso matematico (che di mestiere faceva il magistrato) Pierre de Fermat (1601-1665) scrisse all’altrettanto famoso matematico (oltre che fisico, filosofo e teologo) Blaise Pascal (1623-1662). In essa Fermat risolveva anche alcuni altri problemi riguardanti dei giochi con i dadi, ma lo

scritto è soprattutto interessante per la soluzione dell'antico problema della divisione della posta. Pascal, nella lettera di risposta, concordava con la dimostrazione di Fermat e ne proponeva una variante. Il carteggio tra i due scienziati si può leggere nella traduzione inglese indicata in nota⁹.

Ci tengo a segnalare un divertente “falso” costruito dal famoso probabilista ungherese Alfréd Rényi (1921–1970), il quale ha confezionato quattro lettere apocrife di Fermat a Pascal che “interpolano” parte della corrispondenza andata perduta. L'accuratezza della ambientazione storica, il linguaggio e la fedeltà del testo al pensiero di Fermat rendono quest'opera un piccolo gioiello. La prima traduzione italiana apparve sulla rivista *Induzioni* e successivamente venne riprodotta in (RÉNYI, PASCAL 1991) con una tiratura, credo, bassa. Meriterebbe una terza ristampa e una più larga diffusione.

3. LA DIVISIONE DELLA POSTA

Fermat e Pascal si occuparono del problema della divisione della posta in un gioco improvvisamente interrotto, problema che in termini più semplici e attuali possiamo formulare come segue:

Supponiamo che due giocatori, Anna e Bruno, giochino a testa e croce. L'accordo è che la posta di 100 euro che hanno messo in gioco vada a chi per primo ottiene sei vittorie. Ma nel momento in cui Anna conduce per 5:3 la partita deve essere interrotta e, per circostanze che ignoriamo, non può essere ripresa più tardi. Come va divisa la posta? Certamente Anna deve ricevere di più, ma quanto?

Fermat e Pascal ebbero la felice idea di formulare il problema in termini probabilistici. Nella Tabella 1 sono riportate in colonna tutte le possibili continuazioni della partita. *Si noti che sono riportate anche le continuazioni “inutili” (sono quelle delle prime sei colonne della tabella).*

Nel calcio, quando si va ai rigori, si fa diversamente. Se la squadra A ne ha segnati cinque e la B tre, e toccherebbe alla B calciare l'ultimo rigore, questo, per regolamento, non viene tirato. Qui invece è conveniente pensare a tutte le otto possibilità che si

⁹ Cfr. Siti web <<https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf>>.

possono presentare:

A	A	A	A	B	B	B	B
A	A	B	B	A	A	B	B
A	B	A	B	A	B	A	B

Tabella 1. Le possibili continuazioni della partita interrotta.

Delle otto possibilità, per simmetria tutte ugualmente probabili, le prime sette sono favorevoli ad Anna. Solo nell'ultima, Bruno, dopo aver pareggiato, si aggiudica anche il punto decisivo. Quindi a Bruno spetta solo $1/8$ della posta (12.50 euro), gli altri $7/8$, cioè 87.50 euro, vanno ad Anna.

Il calcolo delle probabilità inizia quindi con un grande successo, risolvendo in modo molto semplice un problema posto nel '400 e con il quale si erano inutilmente cimentati, tra gli altri, Luca Pacioli, Niccolò Tartaglia e Gerolamo Cardano.

Ho voluto iniziare la parte più tecnica con questo esempio (che è molto conosciuto) perché introduce con naturalezza gli elementi fondamentali con i quali più tardi Pierre-Simon Laplace (1749–1827) ha posto le basi della probabilità¹⁰.

4. FORMULAZIONE CLASSICA (DI LAPLACE)

In termini moderni, ma seguendo l'impostazione classica risalente a Laplace, i problemi probabilistici più semplici si possono rappresentare con un insieme Ω , chiamato *spazio di probabilità*, (evento certo), costituito da un numero finito di n elementi (che si chiamano *eventi elementari*) ai quali è naturale assegnare la stessa probabilità $\frac{1}{n}$.

I sottoinsiemi di Ω si chiamano *eventi*. Ciascuno di essi è composto da zero, uno o più eventi elementari (anche tutti).

La probabilità di E è *il rapporto tra il numero k degli eventi elementari favorevoli a E e il*

¹⁰ LAPLACE 1812, 1814.

numero degli eventi possibili (gli elementi di Ω):

$$P(E) = \frac{k}{n}$$

Nel nostro esempio, gli eventi elementari favorevoli ad Anna sono sette, i casi possibili sono otto e quindi:

$$P(A) = \frac{7}{8}$$

Un altro bell'esempio, adattato dal libro di Giovanni Prodi, fa vedere come un problema di soluzione non immediata può essere reso semplice se si considera lo spazio di probabilità "giusto":

Mescoliamo un mazzo di 52 carte "francesi". Due giocatori pescano a sorte alternativamente una carta. Vince il gioco colui che pesca l'asso di cuori. Chi è favorito nel gioco? Forse si è tentati di dire che è favorito colui che pesca per primo, ma non è vero: il gioco è equo, come si dice.

Come nel problema della divisione, conviene pensare che i due giocatori continuino a pescare fino alla fine (anche dopo che l'asso di cuori è uscito) e che si distribuiscano 26 carte a testa. Diventa evidente allora che la probabilità che l'asso di cuori stia da una o dall'altra parte è la stessa.

E che succede se togliamo dal mazzo una carta, diversa dall'asso di cuori, in modo che le carte siano 51? In questo caso chi pesca per primo riceve 26 carte, l'altro 25. Più probabile che l'asso di cuori stia nel gruppo più numeroso, quindi il gioco è favorevole a chi comincia.

5. GIOCHI CON I DADI

I dadi offrono molte possibilità di fare degli esercizi interessanti. Ne possiamo lanciare uno o due o tre, ...

La prima pubblicazione scientifica che parla di un problema probabilistico precede di qualche decennio il carteggio tra Fermat e Pascal. Si tratta di un breve trattato scritto da Galileo Galilei (1564–1642) nel primo periodo della sua permanenza in

Toscana e si intitola *Sopra le scoperte de i dadi*¹¹. Il Granduca di Toscana gli aveva chiesto come mai, lanciando tre dadi, il punteggio di 10 e 11 punti è più frequente di quello di 9 e 12, rispettivamente.

Incominciamo a vedere che cosa succede se lanciamo due dadi.

5.1 DUE DADI

Problemi connessi con il lancio di due dadi sono stati frequentemente utilizzati nei test di ammissione a varie facoltà universitarie, ma non è questo a renderli interessanti.

Se lanciamo due volte un dado, (o due dadi contemporaneamente, che è lo stesso) i risultati possibili sono le coppie ordinate di interi (m, n) , con $1 \leq m \leq 6$, e $1 \leq n \leq 6$, eventi che riportiamo nella Tabella 2.

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

Tabella 2. Risultati possibili nel lancio di due dadi.

Il lancio di due dadi ci porta a uscire in modo naturale dallo schema, un po' ristretto, della probabilità classica (ovvero quella di Laplace). Infatti nei giochi, tradizionali e non, capita spesso di lanciare due dadi e di prestare attenzione non tanto alla coppia ordinata che si ottiene, ma al punteggio totale. Esso è rappresentato nella Tabella 3.

¹¹ GALILEI 1596.

7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7

Tabella 3. Punteggi totali possibili nel lancio di due dadi.

Come è ovvio, il punteggio totale va da 2 a 12 e chi abbia anche una modesta esperienza sa che non tutti i punteggi sono ugualmente probabili. Basta dare un'occhiata alla tabella precedente per capire che le probabilità sono quelle riassunte nella Tabella 4:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabella 4. Probabilità dei punteggi totali nel lancio di due dadi.

Una cosa importante è far capire che lanciare lo stesso dado due volte, o lanciare contemporaneamente due dadi di colore diverso, o lanciare due dadi tra loro indistinguibili, dà risultati identici.

Con un dado si può rappresentare anche il lancio di una moneta: se esce un numero pari, diciamo che abbiamo ottenuto Testa, altrimenti che abbiamo ottenuto Croce.

5.2 LA RISPOSTA DI GALILEO AL GRANDUCA

Lanciando tre dadi si ottengono 9 e, rispettivamente, 10 punti, con le seguenti combinazioni dei singoli risultati (Galileo le chiamava “triplicità”):

9		10	
1+2+6	6	1+3+6	6
1+3+5	6	1+4+5	6
1+4+4	3	2+2+6	3
2+2+5	3	2+3+5	6
2+3+4	6	2+4+4	3
3+3+3	1	3+3+4	3

Tabella 5. Numero di combinazioni dei risultati nel lancio di tre dadi con punteggio totale 9 e 10.

Essendo per il 9 e per il 10 il numero delle *triplicità* lo stesso, il Granduca pensava che i due risultati dovessero avere la stessa probabilità.

Galileo fece notare che, considerando i risultati che possono apparire sui tre distinti dadi, 1+2+6, per dire, conta sei volte, 2+2+5 tre volte, mentre 3+3+3 conta una volta sola! Dunque le sei “triplicità” del 9 danno, con le loro permutazioni, 25 casi favorevoli (si veda la seconda colonna della Tabella 5), mentre le altrettante “triplicità” del 10 danno, con le loro permutazioni, 27 casi favorevoli (quarta colonna). Questo spiega perché il 10 e l’11 sono punteggi più probabili del 9 e del 12, e perché gli altri punteggi 8 e 13, 7 e 14, 6 e 15, 5 e 16, 4 e 17 e infine 3 e 18 sono via via meno probabili.

Certo che il Granduca e i suoi compari dovevano avere una bella esperienza con questo gioco, detto il “gioco della zara” (citato da Dante Alighieri nella *Divina Commedia*, precisamente nel *Purgatorio*)! La differenza tra la probabilità di 9 e di 10 è pari a $\frac{2}{216}$ e quindi meno di $\frac{1}{100}$ (6^3 è il numero dei casi possibili, 2 sono i casi favorevoli in più per il 10).

Nel suo trattato Galileo fece il conto esatto di tutte le combinazioni dei valori con cui si ottengono i vari punteggi. Il passo in più che Galileo non fece è quello di definire la probabilità dei vari punteggi.

Lo fecero, nel loro carteggio, Fermat e Pascal rispondendo anche ad alcune domande poste dal nobiluomo e scrittore Antoine Gombaud, cavaliere de Méré (1607–1684), al quale interessava il confronto della probabilità di due eventi:

Indichiamo con E_1 l'evento che esca almeno un 6 su 4 lanci di un dado e con E_2 l'evento che, lanciando due dadi, esca almeno un doppio 6 su 24 lanci. Quale dei due eventi è più probabile?

Poiché i due eventi corrispondono a due spazi di probabilità diversi, i due studiosi non poterono risolvere il problema (come nel problema della divisione) limitandosi a confrontare il numero dei casi favorevoli, ma dovettero rapportare questi numeri con il numero dei *casi possibili* che, nei due problemi, è diverso.

In questa parte del carteggio compare per la prima volta la definizione formale di probabilità *come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili*, aprendo la strada a Laplace. Il problema di de Méré si trova descritto in tanti testi e qui non ne parleremo.

6. L'ERRORE DI D'ALEMBERT

Parliamo ora del “famigerato” errore di Jean-Baptiste Le Rond – detto - d'Alembert (1717-1783), noto e stimato scienziato. Nell'enciclopedia di Diderot e d'Alembert¹² (e in un successivo articolo) egli sostenne che, lanciando due monete indistinguibili, ci sono tre eventi elementari aventi la stessa probabilità: due teste, due croci oppure una testa e una croce.

Egli fu tratto in inganno dal fatto che se due dadi (o due monete) sono uguali, noi non siamo in grado di distinguere tra i risultati (3, 4) e (4, 3), né tra (T, C) e (C, T). I due eventi ci appaiono diversi solamente se i dadi sono colorati (o le monete sono di tipo diverso, da un euro e da due euro, per dire). In fondo, è lo stesso errore che fece il Granduca che non distingueva tra $1+2+6$ e $2+1+6$.

Ma anche se operiamo con due dadi dello stesso colore che noi non siamo in grado di distinguere, abbiamo a che fare con due eventi distinti. Ce ne convinciamo pensando al lancio di due dadi colorati osservato da un daltonico e da uno che non lo è: la natura dell'esperimento probabilistico non cambia.

¹² D'ALEMBERT 1751.

È un errore nel quale si cade di frequente.

Negli anni '20 il fisico indiano Satyendranath Bose (1894–1974), in una lezione riguardante il comportamento di certe particelle subnucleari, voleva far vedere che la teoria probabilistica non era compatibile con i risultati sperimentali. Ma, nel fare i conti alla lavagna, commise lo stesso errore di d'Alembert e i risultati dei suoi calcoli risultarono invece compatibili con gli esperimenti. Si accorse così che certe particelle (chiamate oggi *bosoni*) obbedivano a regole probabilistiche peculiari.

Non creduto all'inizio, ne parlò con Albert Einstein (1879-1955) e insieme scrissero un articolo.

7. L'INTUIZIONE DI MENDEL

Gregor Mendel (1822–1884), considerato il padre della genetica, era un monaco austriaco. Studiò prima nella piccola, ma antica, Università di Olomouc e poi a Vienna, dove ebbe tra i professori il noto fisico Christian Andreas Doppler (1803-1853).

Entrò in convento a poco più di vent'anni ed ebbe la fortuna di trovare lì un ambiente favorevole allo studio. Nel prendersi cura dell'orto del convento ci mise tutto il suo spirito di osservazione, la sua curiosità e la sua preparazione scientifica. In particolare si interessò alla trasmissione di alcune caratteristiche genetiche nella sua coltivazione di piselli. Ci limiteremo qui a riportare solo una piccola parte delle sue scoperte.

Una delle caratteristiche genetiche che studiò fu il colore dei semi dei piselli, che potevano essere verdi o gialli.

Autoinseminando piselli verdi ottenne sempre discendenza “verde”. Dunque, nessuna sorpresa.

Quando invece fece la stessa l'esperienza con i piselli gialli, scoprì che c'erano in effetti due tipi di piselli gialli: alcuni davano nelle generazioni successive solamente discendenza gialla. Altri piselli gialli invece davano luogo a una discendenza mista.

I piselli verdi e i “gialli del primo tipo” (gli omozigoti) non meritavano dunque altre indagini.

Concentrò allora la sua attenzione sui piselli gialli “del secondo tipo” (gli eterozigoti). La strumentazione scientifica dell'epoca non consentiva di distinguere gli omozigoti dagli eterozigoti. Oggi questo è possibile.

Ripetendo più volte l'esperimento, osservò che dai piselli gialli eterozigoti nascevano nelle generazioni successive tutti e tre i tipi: quelli verdi (omozigoti), i gialli omozigoti e i gialli eterozigoti. Notò anche che tra questi discendenti la percentuale dei tre tipi era circa del 25%, 25% e 50%, rispettivamente.

Possiamo notare (e senza dubbio questa fu un'osservazione che fece anche lui) che era lo stesso rapporto che si ottiene lanciando due monete (con le facce opposte colorate in verde V e giallo G): in media, un quarto delle volte si ottiene VV, un quarto delle volte GG e nella metà dei casi un risultato misto, VG o GV.

Questo, e il fatto che i piselli gialli eterozigoti conservavano in qualche modo una “memoria” della caratteristica verde, gli fece verosimilmente pensare che a ogni caratteristica genetica erano associati due elementi (che lui chiamò *alleli*) e che una delle due caratteristiche era dominante (un'altra sua intuizione), mentre l'altra rimaneva presente nel patrimonio genetico dell'individuo, ma non visibile (*recessiva*, la chiamava lui). Il pisello VV appare ovviamente verde, quello GG ovviamente giallo, ma GV (o VG) appaiono gialli, e questo è meno ovvio. È interessante osservare che anche le strumentazioni di oggi non riescono a dire se un individuo GV(=VG) ha preso l'allele G (o V) dalla madre o dal padre. Gli alleli (anche se intrinsecamente indistinguibili) si comportano quindi come le monete, non come le particelle studiate da Bose!

Ebbe tantissime conferme di questa sua intuizione. Si stima che per i suoi esperimenti usò nel corso della sua vita 28.000 piante di piselli.

È importante notare che non esisteva allora una strumentazione scientifica in grado di confermare queste sue intuizioni: egli costruì un modello, basato in parte sulla probabilità e in parte su congetture genetiche, che funzionava e che spiegava anche altri esperimenti che lui fece (e che qui tralasciamo).

Uno degli scopi di questa breve descrizione del lavoro di Mendel è di far notare nuovamente che gli stessi ragionamenti si possono fare con oggetti diversi: gli alleli si comportano come le monete, i dadi, le carte da gioco, le palline colorate e così via. L'insegnamento della probabilità, più di altre parti della matematica, ha il vantaggio di cambiare facilmente scenario e di far emergere in situazioni apparentemente diverse la struttura matematica sottostante.

8. ADDITIVITÀ

Dalla definizione data da Laplace segue immediatamente la proprietà di *additività* della probabilità:

Se A e B sono due eventi incompatibili (cioè se $A \cap B = \emptyset$), allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Da questa proprietà segue anche l'additività della probabilità per tre o più eventi a due a due disgiunti: se A , B e C , ad esempio, sono tre eventi e se $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ e $C \cap B = \emptyset$, allora

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

I diagrammi di Venn sono un modo molto efficace per rappresentare gli eventi e le operazioni tra eventi come sottoinsiemi di una nuvoletta che rappresenta l'evento certo Ω . Ad Ω assegniamo area 1 e immaginiamo che $P(A)$ rappresenti l'area del sottoinsieme A .

Con questa interpretazione è immediata la comprensione dell'importante formula che dà l'area di $A \cup B$ nel caso in cui A e B non sono incompatibili, cioè quando $A \cap B \neq \emptyset$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

La dimostrazione formale non è difficile ma, se l'uditorio non è sufficientemente maturo, la si può aggirare con un diagramma di Venn, nel quale si vede che l'area di $A \cap B$ è contata due volte.

9. PROBABILITÀ CONDIZIONATA

La probabilità di un evento è sempre condizionata dalle circostanze in cui l'esperimento aleatorio viene eseguito. Se estraiamo una pallina bianca da un'urna che contiene palline bianche e nere, la probabilità di estrarne una bianca dipende dal numero delle une e delle altre, ma può dipendere anche da altre circostanze: ad esempio, se le palline bianche sono più pesanti (e se le palline vengono estratte da sopra), la probabilità diminuisce. Ma ci può essere anche qualche altra circostanza che influisce sulla nostra valutazione di probabilità, ad esempio potrebbe succedere di sapere che si è verificato un altro evento, legato allo stesso esperimento. È di questo che parleremo adesso.

Fermat e Pascal non se ne sono resi conto (come quello che parlava in prosa ma non lo sapeva), ma il problema della divisione della posta si può vedere come un problema di *probabilità condizionata*. Anzi, è il primo problema di probabilità condizionata che la storia conosca, anche se i due studiosi hanno risolto il problema con un metodo diretto.

Anna ha, a priori, probabilità $\frac{1}{2}$ di aggiudicarsi la posta (evento E). Ma noi sappiamo che nelle prime otto partite ha accumulato un vantaggio di 5 : 3 (evento F). Il problema si può dunque riformulare anche in questo modo: qual è la probabilità che si verifichi l'evento E sapendo che si è verificato l'evento F ? Il modo più veloce per risolvere il problema è comunque quello che conosciamo e non conviene cercare altre strade.

Come vedremo più avanti, i concetti di indipendenza e di probabilità condizionata sono nati parecchi decenni dopo il famoso carteggio.

Vediamo un altro esempio.

Sulla ruota della roulette i numeri sono in disordine e colorati. Lo zero è verde, mentre gli altri 36 numeri sono per la metà rossi e per la metà neri. Non tutte le ruote sono uguali. In internet mi è capitato di trovarne una sulla quale, dei diciotto numeri rossi, dieci erano dispari e otto erano pari.

Supponiamo che io stia giocando su una roulette di questo tipo e che abbia puntato sul dispari. A priori la mia probabilità di vittoria è

$$P(D) = \frac{18}{37} \sim 0.4864\dots$$

Sono lontano dal tavolo e non vedo la ruota, ma sento il mio vicino, che è in una posizione migliore, esclamare: è rosso!

Tenendo conto di questa informazione, la mia probabilità di vincere è aumentata, perché i casi possibili sono ora 18, ma quelli favorevoli sono 10 e sono quindi cresciuti, in percentuale:

$$P(D|R) = \frac{10}{18} = 0.\bar{5}$$

Abbiamo introdotto il simbolo con cui si denota la probabilità condizionata: $P(A|B)$ si legge «probabilità di A sapendo che è avvenuto B » o, semplicemente, «probabilità di A condizionata a B ».

Il risultato di Fermat e Pascal si può riscrivere (E ed F sono quelli di prima) usando questa notazione, come

$$P(E|F) = \frac{7}{8}$$

Facciamo un altro esempio.

Sto giocando a poker (con 32 carte) e ho ricevuto una mano abbastanza promettente: $A \heartsuit, K \heartsuit, 10 \heartsuit, 8 \heartsuit, 7 \clubsuit$.

In questa fase del gioco posso scartare la carta (o le carte) che non mi servono e pescare nel mazzo, sperando di rafforzare il mio gioco.

Anche chi sa poco delle regole del gioco, sa che il “flush” (colore, in italiano) è un gioco molto forte.

Mi conviene quindi scartare il 7 di fiori, sperando di pescare un qualunque altro cuori. Quattro ne ho io, ne rimangono quattro. I casi possibili sono le altre 27 carte, quelle che non ho in mano. La probabilità che io peschi un cuori è dunque:

$$P(C) = \frac{4}{27} = 0.\overline{148}$$

Ho pescato ora la nuova carta. I veri giocatori non sono impazienti. Per mantenere una certa suspense apro la carta lentamente, scoprendone solo un piccolo angolino. Quanto riesco a vedere mi fa capire che la nuova carta è un sette rosso, 7R: potrebbe essere il $7\heartsuit$ o il $7\spadesuit$, con uguale probabilità.

La probabilità di avere in mano un flush e di aggiudicarsi il piatto è considerevolmente aumentata. Era del 15% scarso, ora è del 50%:

$$P(F | 7R) = 0.5$$

La cosa mi fa piacere (ma prima di puntare devo sciogliere il dubbio aprendo completamente le carte che ho in mano). Non ogni carta rossa avrebbe acceso le mie speranze: se avessi visto l'angolino di un 10 rosso, non mi sarebbe restato che aspettare il prossimo giro, perché il $10\heartsuit$ è già tra le mie carte e quindi la carta pescata sarebbe stato sicuramente il $10\spadesuit$!

Il concetto di probabilità condizionata gioca un ruolo fondamentale nel calcolo delle probabilità. La formula che ora introdurremo è spesso molto comoda.

Siamo nel caso classico e A e B sono due sottoinsiemi di Ω . Supponiamo che $B \neq \emptyset$.

La probabilità condizionata $P(A|B)$ si calcola con la solita regola del rapporto tra casi favorevoli e casi possibili. I casi possibili si sono ora ridotti ai casi elementari che compongono B . Invece i casi favorevoli sono i casi elementari che compongono $A \cap B$. Indicando con $|B|$ il numero degli elementi dell'insieme B , ecc., si ottiene l'importante formula:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

che permette di calcolare la probabilità condizionata da valori della probabilità degli eventi di Ω .

10. IL GIOCO DELLE TRE CARTE DI WEAVER

Il gioco è stato inventato negli anni '50 da Warren Weaver (1894-1978). Lui stesso però nel suo bel libro *Lady Luck*¹³, che è del 1963, riconosce che la medesima idea era venuta, molto prima, a Joseph Bertrand (1822-1900) con il suo *paradosso delle tre scatole*. Ma la scenografia di Weaver è molto più intrigante e ha il vantaggio di essere facilmente realizzabile in classe.

Si gioca in due, con tre carte un po' particolari: una (RR) è rossa su entrambi i lati, una (RB) ha un lato rosso e uno blu e la terza (BB) è blu su entrambi i lati.

Le tre carte vengono mescolate dentro un sacchetto.

Naturalmente si suppone che chi mescola lo faccia onestamente: potremmo anche chiedere di farlo a una terza persona che non partecipa al gioco.

La carta scelta viene poggiata sul tavolo, non facendo vedere la faccia di sotto che rimane coperta.

Si scommette sul colore della faccia nascosta e tocca al "banco" indicare il colore.

Il banco paga alla pari: se indovina il colore della faccia coperta vince un euro; se perde, perde un euro.

Le tre carte hanno la stessa probabilità di essere estratte e ciascuna delle due facce ha la stessa probabilità di essere quella visibile.

Voi giochereste contro il banco con queste regole?

Supponiamo che sia visibile una faccia blu. Qual è la probabilità che anche l'altra faccia sia blu?

Un ragionamento possibile è il seguente:

Le tre carte hanno la stessa probabilità, e l'altra faccia è blu se e solo se è stata pescata la carta BB. Ma la probabilità di BB è $\frac{1}{3}$.

Sembrerebbe dunque che al banco convenga puntare sul rosso.

Ma la formulazione del problema ci porta fuori strada perché richiama la nostra

¹³ WEAVER 1982.

attenzione sulle carte piuttosto che sulle facce.

Noi sappiamo qual è il colore della faccia visibile ed è su questa informazione che dobbiamo concentrare la nostra attenzione. Indicheremo questo evento con B_1 .

Questo è l'evento *condizionante*. Poiché su sei facce tre sono blu $P(B_1) = \frac{1}{2}$.

Espresso in termini di probabilità condizionata, noi vogliamo sapere quanto vale $P(B_2 | B_1)$.

Per la formula che abbiamo dimostrato prima,

$$P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(BB)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Quindi il gioco è fortemente favorevole al banco, al quale conviene puntare sul colore visibile.

La “soluzione” precedente confonde $P(B_2 | B_1)$ con $P(B_2 \cap B_1)$. Weaver scrive ironicamente nel suo libro:

Quarant'anni fa, quando i giovani laureati dovevano lavorare per mantenersi agli studi, l'autore era solito insegnare questo particolare problema ai suoi colleghi a prezzi ragionevoli, usando il metodo sperimentale.

Una “soluzione lampo” del problema, che mi sembra molto convincente, è la seguente: Delle tre carte, due hanno le facce dello stesso colore e una ha le facce di colore diverso. La probabilità di scegliere una carta “monocolore” è $\frac{2}{3}$. Pertanto la strategia vincente è quella di puntare sullo stesso colore della faccia visibile e questa garantisce una probabilità di vittoria pari a $\frac{2}{3}$.

11. UN ALTRO ESPERIMENTO

L'esempio che segue è ripreso da un esperimento descritto in un articolo di Ruma Falk¹⁴. Lo scopo di questo test era di dimostrare che anche in un contesto

¹⁴ FALK 1986.

probabilistico, i ragazzi continuano a usare uno schema del tipo causa-effetto.

Un'urna contiene due palline bianche e due nere. Da essa viene estratta una pallina che risulta bianca. Essa non viene rimessa nell'urna.

Poi lo sperimentatore estrae una seconda pallina e, senza farcela vedere, ci chiede qual è la probabilità che anche la seconda pallina estratta sia bianca.

Tutti sanno rispondere a questa domanda. Dopo la prima estrazione sono rimaste nell'urna una pallina bianca e due nere. La probabilità di estrarre una pallina bianca

dall'urna che ha questa composizione è $P(B_2 | B_1) = \frac{1}{3}$.

Fin qui tutto facile. Ma Ruma Falk continua con l'esempio.

Lo sperimentatore ripete l'esperimento. Dalla stessa urna estrae una prima pallina e non ce la mostra, né la rimette nell'urna. Poi estrae una seconda pallina. Ce la fa vedere: è bianca.

La domanda ora è: sapendo che la seconda pallina è bianca, qual è la probabilità che la prima fosse bianca? In altre parole, quanto vale $P(B_1 | B_2)$?

Questa domanda ha confuso i ragazzi coinvolti nell'esperimento. L'intenzione della Falk era proprio questa: mettere in discussione l'idea che solamente un evento precedente può condizionare la probabilità di un evento successivo.

I ragazzi hanno ragionato in maniera causale, non probabilistica. Che la probabilità dell'uscita di una pallina bianca nella seconda estrazione "dipenda" da un evento precedente è sembrata loro ragionevole, ma il viceversa li ha lasciati interdetti.

La risposta preferita è stata $\frac{1}{2}$. Di fatto costoro hanno ignorato l'informazione ricevuta.

Alcuni sono arrivati ad affermare che la domanda era priva di senso.

La Falk argomenta così: la pallina scelta alla seconda estrazione non poteva essere estratta alla prima e quindi di fatto è come se la prima estrazione fosse avvenuta da

un'urna contenente una sola pallina bianca. Ne segue che $P(B_1 | B_2) = \frac{1}{3}$ ($= P(B_2 | B_1)$).

Propongo una soluzione più digeribile: lo sperimentatore estrae la prima pallina e se la mette nella tasca sinistra. La seconda pallina estratta se la mette nella tasca destra. Mostrare una delle due palline condiziona nella stessa maniera la probabilità del colore dell'altra.

12. INDIPENDENZA

La probabilità condizionata ci permette di introdurre un concetto molto importante, quello di *indipendenza* tra eventi.

Negli esempi precedenti l'evento condizionante cambia la nostra valutazione della probabilità dell'evento osservato.

Però potrebbe anche capitare che

$$P(A | B) = P(A)$$

In questo caso si dice che i due eventi sono *indipendenti*. Questo succede senz'altro nei casi banali, se cioè $A = \emptyset$ oppure se $B = \Omega$. Perciò non ci interesseremo di questi due casi.

Introduciamo due definizioni che ci saranno utili in seguito.

Diciamo che due eventi A e B sono *positivamente correlati*, se

$$P(A | B) > P(A)$$

cioè se, sapendo che B si è verificato, la probabilità di A aumenta.

Ovviamente diremo che due eventi sono *negativamente correlati*, se

$$P(A | B) < P(A),$$

cioè se, sapendo che B si è verificato, la probabilità di A diminuisce.

Vediamo qualche esempio.

Prendiamo il solito mazzo di 52 carte francesi. Gli eventi siano A =«peschiamo un asso» e C =«peschiamo un cuori». Si ha naturalmente $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = P(A | C)$. Quindi

A e C sono indipendenti.

Il modo più appropriato per definire l'indipendenza è la formula $P(A | B) = P(A)$,

perché essa descrive in maniera significativa la relazione che c'è tra A e B . Inoltre vi si legge anche la correlazione positiva e negativa.

Però questa formula ha un difetto: A e B vi compaiono in maniera asimmetrica, giocano un ruolo diverso. Conviene allora ricordare che

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

e sostituire questa identità nella definizione. Otteniamo allora

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A),$$

ovvero

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Questa formula si chiama la *formula moltiplicativa* ed è utile quando si vuole verificare se due eventi sono indipendenti oppure no.

Questa formula è equivalente alla definizione, se $P(B) \neq 0$.

Sconsiglio di utilizzare la formula moltiplicativa (con l'aggiunta della condizione $P(B) \neq 0$) come definizione di indipendenza (anche se qualcuno lo fa). La definizione che abbiamo dato noi indica molto più esplicitamente il significato di indipendenza. D'altra parte la formula moltiplicativa può essere comoda per verificare l'indipendenza.

La formula moltiplicativa è evidente nel caso in cui si tratti di eventi di un insieme prodotto, come nell'esempio seguente.

Se lanciamo due dadi, prendiamo gli eventi A =«con il primo dado ottengo un numero alto, 4, 5 o 6» e B =«con il secondo dado ottengo un numero intermedio, cioè 3 o 4».

Nella Tabella 6 gli eventi elementari che compongono $A \cap B$ sono indicati con le parentesi quadre e ce ne sono $2 \times 3 = 6$.

Ne segue immediatamente che $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = P(A)P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$ e i due eventi sono indipendenti, come era facile capire.

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	[4,4]	[5,4]	[6,4]
(1,3)	(2,3)	(3,3)	[4,3]	[5,3]	[6,3]
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

Tabella 6. Gli eventi elementari nel lancio di due dadi.

Può essere comodo rappresentare l'insieme Ω delle 52 carte francesi come un insieme prodotto:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\} \times \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$$

e costruire vari esempi di coppie di eventi indipendenti che formano dei “rettangoli”, riscoprendo così la vecchia regola che l'area di un rettangolo è “base per altezza”.

Ma l'indipendenza non è sempre così evidente. Vediamo un altro esempio. Riconsideriamo il lancio di due dadi e prendiamo i due seguenti eventi: A =«con il primo dado si ottiene 4»; B =«il punteggio totale è 7».

I due eventi sono indipendenti. Infatti: $P(A) = \frac{1}{6}$ e anche $P(B) = \frac{1}{6}$; poiché $A \cap B = \{(4, 3)\}$

risulta $P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)$.

È interessante notare come l'esistenza di eventi indipendenti richiede che $|\Omega|$ non sia un numero primo.

Sia infatti $|A| = a$, $|B| = b$ e $|A \cap B| = c$. Se A e B sono indipendenti, dopo qualche semplificazione otteniamo $ab = c|\Omega|$. Ne segue che $c < \min(a, b)$. Ma poiché $|\Omega| = \frac{ab}{c}$, segue che $|\Omega|$ non è primo.

Quest'altro esempio, più sofisticato, è tratto da un libro¹⁵ di Jordan Stoyanov.

Lo spazio di probabilità consiste in tre lanci di una moneta. È l'insieme delle otto sequenze che abbiamo visto nel problema della divisione. Solo che questa volta non supponiamo che la moneta sia regolare. Poniamo $P(C) = p$, con $0 < p < 1$, e $P(T) = q = (1 - p)$.

Sia $A = \text{«escono almeno due croci»}$ e $B = \text{«i tre risultati sono uguali»}$.

Poiché $A = \{(C,C,C), (C,C,T), (C,T,C), (T,C,C)\}$ e $B = \{(T,T,T), (C,C,C)\}$, si ha:

$$P(A) = p^3 + 3p^2(1-p) \text{ e } P(B) = p^3 + (1-p)^3.$$

Inoltre $A \cap B = \{(C,C,C)\}$ e quindi $P(A \cap B) = p^3$

Ne segue che $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ se e solo se

$$(p^3 + 3p^2(1-p))(p^3 + (1-p)^3) = p^3$$

Rielaborando l'equazione si ottiene

$$p^2(1 - 4p + 5p^2 - 2p^3) = p^2(1-p)^2(1-2p) = 0$$

Si vede quindi che il polinomio di quinto grado ha due radici doppie, $p = 0$ e $p = 1$.

La quinta radice, quella interessante, è $p = \frac{1}{2}$.

Quindi A e B sono indipendenti se e solo se la moneta è regolare.

Guardando il segno del polinomio che esprime $P(A \cap B) - P(A)P(B)$ possiamo osservare

che A e B sono positivamente correlati se $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ e negativamente correlati se

$$p \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[.$$

13. L'INDIPENDENZA, IL COMMENSALE SILENZIOSO

Abbiamo introdotto il concetto di *indipendenza* solo verso la fine di questa presentazione. Questa scelta corrisponde alla storia dello sviluppo della probabilità. Ma, in effetti, l'indipendenza era presente implicitamente sin dall'inizio. Galileo dava

¹⁵ STOYANOV 2017.

per scontato che i risultati che si ottengono con i tre dadi siano tra loro indipendenti, e così anche per Fermat e Pascal i risultati nei lanci che rimanevano da giocare non dipendevano dai risultati precedenti. Il problema neanche se lo ponevano.

Solamente l'emergere di problemi più complessi rese naturale e, anzi, inevitabile introdurre il concetto di dipendenza e indipendenza.

In matematica succede spesso che una proprietà importante rimanga a lungo inosservata e latente.

Per fare un esempio classico: nel 1821 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) pubblicò una “dimostrazione” del fatto che la somma di una serie convergente di funzioni continue è continua.

Ma nel 1826 Niels Henrik Abel (1802-1829) scrisse che ci doveva essere un errore nella dimostrazione, presentando due controesempi relativi a *serie di Fourier*. Solo Karl Weierstrass (1815-1897), alcuni decenni dopo, introdusse il concetto, evidentemente non compreso da Cauchy e neanche da Abel, di convergenza *uniforme* di una serie, proprietà che assicura la continuità della somma di una serie convergente di funzioni continue.

Per quanto riguarda il calcolo delle probabilità, il primo a rendersi conto dell'importanza dell'indipendenza (e del suo contrario, la dipendenza) fu Abraham de Moivre (1667–1754), il quale scrisse, più di sessant'anni dopo il carteggio Fermat-Pascal, nel suo trattato “The Doctrine of Chances”¹⁶:

Due eventi sono indipendenti quando non c'è tra loro alcuna connessione e il verificarsi di uno dei due non favorisce né sfavorisce il verificarsi dell'altro.

Due eventi sono dipendenti, quando sono connessi tra loro in modo tale che la probabilità del verificarsi di uno dei due è modificata dal verificarsi dell'altro.

E continuava così¹⁷:

[...] la probabilità che si verifichino due eventi dipendenti è il prodotto della probabilità di uno dei due e della probabilità che si verifichi l'altro [...] e la stessa regola si applica per un numero qualunque di eventi assegnati.

¹⁶ DE MOIVRE 1756, p. 6 (traduzione dell'autore).

¹⁷ DE MOIVRE 1756, p. 7 (traduzione dell'autore).

La dipendenza è espressa meglio, l'indipendenza invece è espressa accostando due frasi, delle quali la prima è molto vaga. Che cosa vuol dire esattamente che *tra i due eventi non c'è alcuna connessione*?

Riprendiamo l'esempio di Stoyanov.

Se lanciamo una moneta tre volte, c'è connessione tra i due eventi A =«escono almeno due croci» e B =«i tre risultati sono uguali»? Se non avessimo fatto i conti, non sapremmo come rispondere. Usando la definizione “moderna”, abbiamo visto che essi sono indipendenti se e solo se la moneta è regolare. Ma, nella formulazione verbale, la connessione tra A e B sembrerebbe la stessa per ogni p .

Ma c'è dell'altro: de Moivre non si pose la domanda se dall'essere

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

si può dedurre che il verificarsi di A non favorisce né sfavorisce il verificarsi di B .

In altre parole, la formula moltiplicativa per lui sembrerebbe essere solo un metodo di calcolo della probabilità di $A \cap B$ se i due eventi sono indipendenti.

È plausibile immaginare che la formula moltiplicativa sia stata suggerita a de Moivre da quanto si verifica per gli spazi prodotto.

Infine, c'è un altro punto delicato che sfuggiva a de Moivre. La dipendenza di tre eventi (per dire), va espressa con quattro condizioni (STOYANOV 2017, esempi 3.2 e 3.3).

In termini “moderni”, A , B e C si dicono indipendenti se e solo se oltre all'equazione:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C),$$

presa in considerazione da de Moivre, sono verificate anche le tre equazioni:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C) \quad \text{e} \quad P(C \cap B) = P(C)P(B).$$

Fu comunque per merito di de Moivre che i matematici incominciarono a prestare attenzione all'indipendenza, perfezionando nei decenni successivi quanto nella sua formulazione c'era ancora di incompiuto.

Noi, che siamo dei nani seduti sulle spalle di giganti come de Moivre, riusciamo a vedere un po' più lontano.

Concludo questo articolo con le referenze che ho usato e che possono essere utili per chi vuol fare ulteriori approfondimenti.

BIBLIOGRAFIA

D'ALEMBERT J.

1751, *Croix ou pile*, in J. LE ROND D'ALEMBERT, D. DIDEROT (a cura di), «Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers», Tome IV (I edizione), Parigi, André le Breton, Michel-Antoine David, Laurent Durand, Claude Briasson, pp. 512-513.

BAROZZI G. C., CIARRAPICO L.

2003, «Il piano nazionale per l'informatica», *Boll. UMI*, ser. 8, Vol. 6-A, *La Matematica nella Società e nella Cultura*, n. 3, pp. 441-461.

DE FINETTI B.

1964, «Insegnamento di materie scientifiche nella scuola media unica e preparazione degli insegnanti», *Periodico di Matematiche*, 42, n. 1-2, pp. 72-114.

1965, *La probabilità: guida nel pensare e nell'agire*, Quaderno N. 11, Trento, Istituto Universitario di Scienze Sociali di Trento.

1990, *Theory of Probability. A critical introductory treatment*, Chichester, Wiley Interscience Publishers.

FALK R.

1986, *Conditional Probabilities: Insights and Difficulties*, in «*Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*», The Second International Committee on Teaching Statistics, Victoria, pp. 292-297.

FISCHBEIN E.

1975, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Dordrecht, Reidel.

1984, *L'insegnamento della probabilità nella scuola elementare*, in G. PRODI (a cura di), «Processi cognitivi e apprendimento della matematica nella scuola elementare 35-49», Brescia, Editrice La Scuola.

GALILEI G.

1596, *Sopra le scoperte de i dadi*, in A. FAVARO (a cura di) «Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale», Tipografia La Barbera 1897, Firenze (1718), Vol. VIII, pp. 591-594.

KLEIN F.

1890, «Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti» (trad. it. a cura di Gino Fano), *Annali Mat. Pura Appl.* Serie 2, vol. 17, pp. 307-343.

1908, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Vol. 1, Leipzig, Teubner.

LAPLACE P. S.

1812, *Théorie analytique des probabilités*, Paris, Courcier.

1814, *Essai philosophique des probabilités*, Paris, Courcier.

DE MOIVRE A.

1756, *The Doctrine of Chances, or: A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play. The third edition*, Londra, Millar (I edizione 1718).

PIAGET J.

1976, *La genesi dell'idea di fortuito nel bambino*, Roma, Newton Compton.

PRODI G.

1991, *Didattica della probabilità nella scuola media*, Relazione nell'ambito del Convegno "Temi dell'insegnamento della matematica nella scuola media ed aspetti interdisciplinari" (Montecatini, 11-14 aprile 1991).

1992, *Metodi matematici e statistici*, Milano, McGraw-Hill.

RÉNYI A.

1991, *Pascal, Lettere sulla probabilità*, "Millelire", Roma, Stampa Alternativa (ristampa).

ROSSI C.

1999, *La matematica dell'incertezza*, Bologna, Zanichelli.

STOYANOV J.

2017, *Counterexamples in probability*, New York, Dover (ristampa).

TVERSKY A., KAHNEMAN D.

1974, «Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases», *Science*, New Series, vol. 185, n. 4157 (Sep. 27, 1974), pp. 1124-1131.

VOLČIČ A.

2015, «Taxi verdi e taxi blu», *Archimede*, n. 3.

WEAVER W.

1982, *Lady Luck*, New York, Dover (ristampa).

SITI WEB

LEE P. M.

Fermat and Pascal on probability,

<<https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf>>, sito consultato il 10.12.2019.

Terza parte

Notizie*

Incontro “Giovanni Torelli 1988-2018. Il ricordo di un matematico appassionato” (Trieste, 20 dicembre 2018)

Alcuni docenti della Sezione di Matematica del Dipartimento di Matematica e Geoscienze dell'Università di Trieste hanno organizzato un incontro aperto a tutti coloro che volessero ricordare il matematico Giovanni Torelli¹ in occasione del trentesimo anniversario della sua scomparsa.

L'evento, intitolato: “Giovanni Torelli 1988-2018. Il ricordo di un matematico appassionato”, si è svolto giovedì 20 dicembre 2018, a partire dalle 15.30, nell'Aula “Ugo Morin”, nella sede del Dipartimento di Matematica e Geoscienze posta nel campus di Piazzale Europa.



Figura 1. Paola e Lucio, figli di Giovanni Torelli, salutano i partecipanti all'evento.

Per ricordare Giovanni Torelli, nell'Università di Trieste erano stati già organizzati nel passato alcuni eventi: nel 1995, si è tenuto un Convegno in sua memoria

* Title: *Chronicle*.

¹ Per approfondimenti sulla figura di Giovanni Torelli si veda la Prima parte (monografica) di questo numero della rivista.

(*Giornate di Didattica, Storia ed Epistemologia della Matematica in ricordo di Giovanni Torelli*, Trieste, 29-30 agosto 1995) e nell'anno accademico 2000/2001, è stato bandito a suo nome un concorso per gli studenti delle Scuole secondarie (*Premio Giovanni Torelli per un lavoro multimediale di matematica*).



Figura 2. L'intervento introduttivo di Daniele Del Santo.

I partecipanti all'incontro sono stati numerosi, ben oltre il centinaio, a dimostrazione di quanto vivo sia ancora il ricordo di Giovanni Torelli in tutti quelli che lo hanno conosciuto. Sono intervenuti matematici dell'Università di Trieste e di altre sedi universitarie, ma anche docenti universitari di altre discipline, insegnanti di Scuola secondaria, ex allievi di Torelli all'Università o nella Scuola secondaria e, naturalmente, familiari e amici.

All'apertura, Paola e Lucio Torelli, figli di Giovanni, hanno salutato i partecipanti all'evento, a nome di tutta la loro famiglia. Sono quindi intervenuti Daniele Del Santo, Collaboratore del Rettore per la Didattica, le politiche per gli studenti, il diritto allo studio, e Francesco Princivalle, Direttore del Dipartimento di Matematica e

Geoscienze, per porgere un saluto ai partecipanti nella loro veste ufficiale e ricordare la figura di Giovanni Torelli.

Lucio Torelli ha poi tratteggiato brevemente la figura di suo padre.

Successivamente, Luciana Zuccheri ha esposto il programma dell'incontro, spiegandone le motivazioni.



Figura 3. L'apertura dell'intervento di Pierpaolo Omari.

Il programma comprendeva una serie di interventi; nell'ordine:

- Pierpaolo Omari e Fabio Zanolin hanno illustrato l'attività scientifica di Giovanni Torelli nel campo dell'Analisi matematica.
- Luciana Zuccheri ha illustrato il lavoro svolto da Giovanni Torelli nel campo della Didattica della matematica e Marina Rocco ha portato un esempio di come egli si rapportava con gli insegnanti del Nucleo di Ricerca Didattica, presentando la sua esperienza.
- Sergio Invernizzi ha dedicato a Giovanni Torelli un proprio contributo intitolato "Trucchi e tranelli nell'assiomatica dei numeri reali".

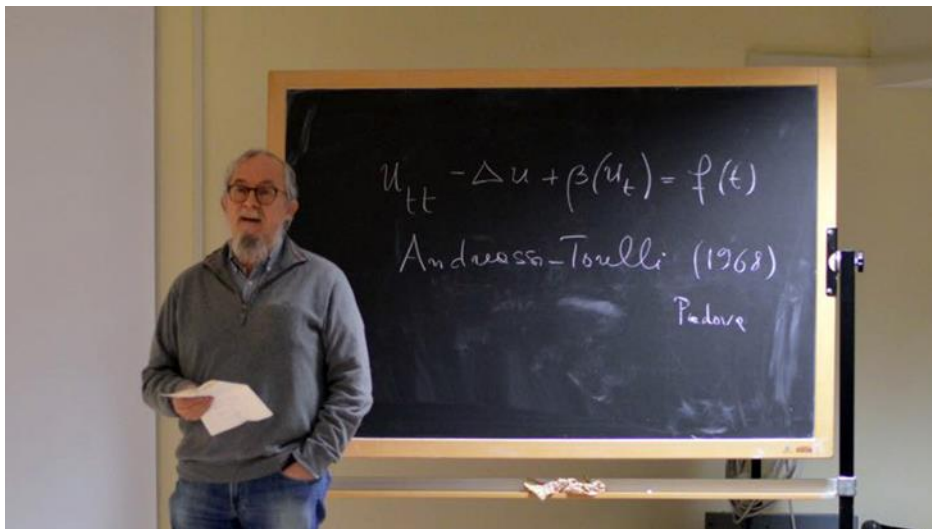


Figura 4. L'intervento di Fabio Zanolin.

Alla fine degli interventi programmati è stato dato ampio spazio agli interventi liberi dei partecipanti. In particolare, Alfredo Bellen, Alessandro Fonda e Sergio Paoletti hanno voluto ricordare la figura di Giovanni Torelli nella loro esperienza personale.

LUCIANA ZUCCHERI
Direttore responsabile "QuaderniCIRD", Università di Trieste
zuccheri@units.it

PIERPAOLO OMARI
Dipartimento di Matematica e Geoscienze, Università di Trieste
omari@units.it

LUCIO TORELLI
Dipartimento Universitario Clinico di Scienze mediche,
chirurgiche e della salute, Università di Trieste
torelli@units.it

Notizie*

La Giornata di formazione “Per un percorso di crescita e d’inclusione: sinergia tra Università e Scuola” (Trieste, 18.10.2019)

1. EVOLUTIVA_MENTE LAB: UN “LUOGO” DI RICERCA-AZIONE

Venerdì 18 ottobre 2019 presso l’Aula 2B, Edificio H3, Campus Universitario Piazzale Europa 1, si è svolto un seminario dal titolo “*Per un percorso di crescita e d’inclusione: sinergia tra Università e Scuola*” organizzato da *Evolutiva_mente Lab - Laboratorio di Psicologia dello Sviluppo e dei Processi di Apprendimento* del Dipartimento di Scienze della Vita dell’Università degli Studi di Trieste.



Figura 1. Lo staff di *Evolutiva_mente Lab - Laboratorio di Psicologia dello Sviluppo e dei Processi di Apprendimento* del Dipartimento di Scienze della Vita dell’Università degli Studi di Trieste: da sinistra a destra Marija Živković (dottoranda), Maria Chiara Passolunghi (Prof. Ordinario di Psicologia dello Sviluppo e Psicologia dell’Educazione), Chiara De Vita (dottoranda), Martina Fontana (dottoranda) Sandra Pellizzoni (ricercatrice), Marta Vidoz (assegnista di ricerca), e-mail: <lab.apprendimento@units.it>.

Il Laboratorio, coordinato dalla Prof.ssa Maria Chiara Passolunghi, all’interno del quale collaborano una ricercatrice, un’assegnista, tre dottorande di ricerca e una decina di

* Title: Chronicle.

tesisti magistrali, è una realtà molto attiva da un punto di vista scientifico, che promuove e porta avanti linee di ricerca specifiche riguardanti, soprattutto, l'apprendimento matematico (v. Figura 1).

Alla base di questo interesse per la disciplina ci sono numerose ricerche che indicano la centralità della matematica, non solo per la correlazione con il successo scolastico e professionale¹, ma anche per la sua rilevanza nel comprendere e svolgere adeguatamente molti compiti quotidiani, come effettuare operazioni bancarie, leggere la tabella oraria di un autobus o cogliere appieno le indicazioni di un medico riguardo a percentuali di rischio associate a una determinata condizione diagnostica².

Maggiori abilità matematiche, inoltre, garantiscono una migliore comprensione di concetti di carattere economico, politico e sociale così come una più attiva, informata e consapevole partecipazione in scelte individuali e collettive³.

Alla luce dell'importanza di queste competenze tanto per il benessere del singolo quanto per la coesione e il progresso sociali, le ricerche promosse all'interno del laboratorio indagano i fattori che favoriscono, o al contrario ostacolano, questo tipo di apprendimento, concretizzandosi in progetti e attività di valutazione e intervento.

2. LA FORMAZIONE COME STRUMENTO DI CRESCITA INDIVIDUALE E COLLETTIVA

Nel promuovere in modo sempre più sistematico e inclusivo la sua mission, *Evolutiva_mente Lab*, oltre alle consolidate relazioni con alcune scuole del territorio triestino, ha voluto organizzare una giornata di approfondimento e condivisione su temi rilevanti per l'apprendimento indirizzata a tutte le scuole della regione (v. Figura 2).

L'evento è stato realizzato in collaborazione con varie Istituzioni tra cui il mondo della Scuola rappresentato da Marina Reppini (Dirigente Scolastico dell'Istituto Comprensivo "I. Svevo" di Trieste), l'Ufficio Scolastico Regionale rappresentato dalla dott.ssa Giovanna Berizzi, l'Associazione Nazionale Airipa (Associazione Italiana per la Ricerca

¹ DUNCAN et al. 2007; RIVERA-BATIZ 1992.

² REYNA, NELSON, HAN, DIECKMANN 2009.

³ GROSS, HUDSON, PRICE 2009; REYNA, BRAINERD 2007.

e l'Intervento nella Psicopatologia dell'Apprendimento, <<https://www.airipa.it/>>) rappresentata dal dott. Claudio Tonzar e alcuni esperti nazionali di Psicologia dello Sviluppo (dott. Claudio Vio e dott.ssa Pamela Dovigo).

L'obiettivo dell'incontro era quello di far convergere le conoscenze di chi si occupa di apprendimento da un punto di vista scientifico e clinico con le esperienze di chi quotidianamente promuove attività educative a favore di alunni delle scuole di ogni ordine e grado.

Grazie al contributo di più interlocutori, l'intento della giornata di formazione è stato proprio quello di co-costruire nuove conoscenze e integrare molteplici prospettive sullo sviluppo dei processi di apprendimento, prendendo in considerazione i diversi contesti di apprendimento in cui un bambino può ritrovarsi e i diversi attori con i quali può interfacciarsi durante il suo percorso di crescita.



Figura 2. La Prof.ssa Maria Chiara Passolunghi nel corso del suo intervento dal titolo “Come promuovere i processi alla base dell'apprendimento” durante la giornata di formazione “Per un percorso di crescita e d'inclusione: sinergia tra Università e Scuola”.

Hanno partecipato con intensità, attenzione e vivo interesse circa ottanta insegnanti incuriositi, soprattutto, dall'approfondimento di temi attuali, ad esempio “Come la scuola può intervenire con gli alunni con disturbi del comportamento?” e la possibilità di realizzare specifiche esperienze di ricerca-azione su aspetti relativi ai processi di

apprendimento. La possibilità di confronto, scambio e approfondimento di conoscenze e esperienze, così come il clima di discussione costruttiva su temi attuali, hanno consentito feconde sinergie tra il mondo della Scuola e quello dell'Università, garantendo la possibilità di guardare congiuntamente al futuro attraverso lo sviluppo di percorsi di crescita e di inclusione degli adulti di domani.

Questa giornata di formazione si è, quindi, configurata come l'innescò di un circolo virtuoso di possibili azioni di collaborazione e co-progettazione tra due realtà, quella scolastica e quella accademica, nell'intento condiviso di migliorare la qualità della vita e il benessere generale dei futuri cittadini, intervenendo, con azioni mirate e specifiche, già a partire dalla scuola dell'infanzia.

Crediamo fortemente che incontri come questo possano essere volano per creare azioni educative innovative, ancorando proposte teoriche a modalità didattiche concrete, promuovendo approfondimenti e scambio di informazioni e diventando incubatore, anche politico, di nuove possibilità.

PROGRAMMA DEI LAVORI

14.00-14.30 Saluti delle autorità.

14.30-15.00 Prof.ssa Maria Chiara Passolunghi, *Come promuovere i processi alla base dell'apprendimento.*

15.00-15.50 Dott.sse Chiara De Vita, Martina Fontana, Sandra Pellizzoni, Marta Vidoz, Marija Živković, *Attività di ricerca-azione nella scuola.*

15.50-16.20 Coffee break

16.20-16.40 Dott.ssa Pamela Dovigo, *Psicologia dell'educazione e scuola: quali opportunità di collaborazione?*

16.40-17.30 Dott. Claudio Vio, *Come la scuola può intervenire con gli alunni con disturbi del comportamento?*

17.30-18.00 Dibattito e chiusura dei lavori.

BIBLIOGRAFIA

DUNCAN G. J., DOWSETT C. J., CLAESSENS A., MAGNUSON K., HUSTON A. C., KLEBANOV P., PAGANI L. S., FEINSTEIN L., ENGEL M., BROOKS-GUNN J., SEXTON H., DUCKWORTH K., JAPEL C.

2007, «School readiness and later achievement», *Developmental psychology*, 43(6), pp. 1428-1446.

GROSS J., HUDSON C., PRICE D.

2009, *The long term costs of numeracy difficulties. Every child a chance trust and KPMG*, East Sussex, UK: National Numeracy.

REYNA V. F., BRAINERD C. J.

2007, «The importance of mathematics in health and human judgment: Numeracy, risk communication, and medical decision making», *Learning and Individual Differences*, 17(2), pp. 147-159.

REYNA V. F., NELSON W. L., HAN P. K., DIECKMANN, N. F.

2009, «How numeracy influences risk comprehension and medical decision making», *Psychological bulletin*, 135(6), pp. 943-973.

RIVERA-BATIZ F. L.

1992, «Quantitative literacy and the likelihood of employment among young adults in the United States», *Journal of Human Resources*, pp. 313-328.

SANDRA PELLIZZONI

Dipartimento di Scienze della Vita, Università di Trieste
spellizzoni@units.it

CHIARA DE VITA

Dipartimento di Scienze della Vita, Università di Trieste
chiaradv@hotmail.it

MARTINA FONTANA

Dipartimento di Scienze della Vita, Università di Trieste
martina.fontana@phd.units.it

MARTA VIDOZ

Dipartimento di Scienze della Vita, Università di Trieste
martavidoz@gmail.com

MARIJA ŽIVKOVIĆ

Dipartimento di Scienze della Vita, Università di Trieste
marija.zivkovic@phd.units.it

MARIA CHIARA PASSOLUNGI

Dipartimento di Scienze della Vita, Università di Trieste
passolu@units.it

Interazione disciplinare tra matematica e fisica: un incontro di formazione per gli insegnanti con Olivia Levrini

Il 26 novembre 2018 il MIUR ha pubblicato nel Decreto Ministeriale 769 i quadri di riferimento per lo svolgimento della seconda prova del nuovo Esame di Stato nel secondo ciclo di istruzione come previsto dal Decreto Legislativo 62 del 13 aprile del 2017. Alla specificità disciplinare è stata così aggiunta la possibilità di avere delle prove di indirizzo a carattere interdisciplinare, con declinazione trasversale, pur mantenendo le caratteristiche strutturali delle prove somministrate negli anni precedenti.

Per i docenti si è trattato quindi di mettersi in una prospettiva differente, quella in cui era loro richiesta l'integrazione dei percorsi disciplinari, ma soprattutto era necessario ampliare gli aspetti di interazione tra i contenuti didattici, nelle concrete esperienze di insegnamento. Inoltre, la costruzione delle prove scritte di valutazione *in itinere* e la preparazione alla prova finale avrebbero pertanto dovuto essere differenti da quanto fatto in precedenza. È questa la prospettiva che ha richiesto una revisione anche formale dei percorsi che i docenti proponevano nell'ultimo anno dell'istruzione secondaria.

In ambito scientifico tale richiesta riguardava in particolare la seconda prova dei Licei scientifici: una prova integrata di matematica e fisica.

Questo cambiamento normativo è stato in realtà per molti docenti uno spunto per ampliare la riflessione riguardo all'interdisciplinarietà tra matematica e fisica. La prova d'esame è solo la "punta dell'iceberg" del processo di apprendimento, è infatti

* Title: *Chronicle*.

il momento finale, conclusivo dell'intero ciclo di studi. Quale percorso è stato fatto prima, come vengono integrati i saperi negli anni di formazione, quale prospettiva didattica è stata utilizzata e perché è così importante lavorare sui piani di interazione disciplinare soprattutto quando si parla di matematica e fisica?

Anche per rispondere a queste domande, a distanza di un anno dalla pubblicazione del Decreto Ministeriale, il 26 novembre 2019, nell'ambito delle attività del Piano Lauree Scientifiche di Fisica e Matematica dell'Università degli Studi di Trieste, è stato organizzato un seminario per i docenti di area scientifica delle scuole secondarie dal titolo "Interazioni disciplinari tra matematica e fisica: dalle difficoltà concettuali all'integrazione disciplinare".

A offrire spunti di riflessione e di approfondimento su tali tematiche è stata invitata la professoressa Olivia Levrini del Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Bologna, da vent'anni impegnata nel campo della ricerca in didattica della fisica e promotrice di progetti per l'innovazione dell'insegnamento disciplinare.



Figura 1. La Prof.ssa Levrini nel corso del seminario.

Partendo da un'analisi del contesto sociale ed educativo attuale dove le esperienze di costruzione delle conoscenze sono caratterizzate dall'estrema brevità, sia dal punto di vista temporale (*durata dell'esperienza*) sia dal punto di vista riflessivo-valoriale (*elaborazione delle informazioni condivise*), la relatrice ha invitato i presenti a confrontarsi con il ruolo che può avere l'interdisciplinarietà per lo sviluppo sia di competenze di

pensiero, epistemiche e di senso, che delle cosiddette ‘competenze di futuro’, legate alla costruzione delle future esperienze di apprendimento.

Il riferimento concettuale si rifà agli studi di Michele Pellerey, insigne matematico e pedagogista, a cui si deve una declinazione didattica delle virtù dianoetiche aristoteliche, ovvero di un insieme di competenze che integrino i saperi nella loro organizzazione epistemica, di valutazione, di argomentazione e di applicazione concreta.

Al contrario, una prospettiva didattica fondata prevalentemente sull’acquisizione di conoscenze è fortemente limitante. Serve quindi recuperare il concetto pieno di *disciplina*, implicante gli aspetti concettuali fondativi, il contesto di sviluppo, il metodo proprio utilizzato e il linguaggio esplicativo della medesima.

Tale approccio a ogni singola disciplina ne garantisce la comprensione come struttura sociale, istituzionale di trasmissione del sapere. Nello stesso modo esso permette un’apertura interdisciplinare che non sia lesiva dell’identità di ciascuna: “non è a-disciplinarità, non è multi-disciplinarità”, non è nemmeno “subalternità di una disciplina all’altra”.



Figura 2. Il pubblico presente al seminario durante l’intervento della Prof.ssa Levrini.

Citando ancora le parole della relatrice, «l’interdisciplinarità aiuta a ridare autenticità alle discipline e a ricostruire capitoli fondamentali di evoluzione del

pensiero e della conoscenza disciplinare, a capire il contenuto stesso di un tema disciplinare (es. la crisi dei fondamenti di inizio '900, con relatività e fisica quantistica, o la rivoluzione del '600)».

In direzione opposta la conoscenza disciplinare aiuta ad entrare nel significato delle nuove discipline o a gestire problemi che ancora non sono organizzati in una nuova disciplina.

Nell'ambito di un corso di formazione insegnanti realizzato nel Piano Lauree Scientifiche all'Università di Bologna si è svolta un'interessante riflessione con gli insegnanti circa le possibili forme del rapporto tra matematica e fisica, declinabile in almeno quattro modi: la matematica come “ancella” della fisica, la fisica come “vestito” a un problema di matematica per contestualizzarlo in una situazione concreta, la multidisciplinarietà di matematica e fisica nel loro presentarsi con diverse epistemologie e infine l'interdisciplinarietà come esempio vero di integrazione disciplinare.

Dopo qualche veloce esempio per i primi tre approcci, la discussione si è poi focalizzata sull'attività di ricerca condotta verso l'*interdisciplinarietà* in alcuni esempi concreti.

È stata illustrata ad esempio l'esperienza di come da un punto di vista storico, nella risoluzione del problema del corpo nero, il fisico Planck sia arrivato alla formulazione della legge che oggi porta il suo nome per «un mero atto di disperazione, a cui poi dovette dare un significato di tipo fisico».

L'analisi storica del processo del pensiero di Planck, le sue argomentazioni e le conseguenze che la sua legge ebbe nella storia della fisica moderna sono pubblicate in un recente articolo¹, dove viene messo tra l'altro in risalto il ruolo del cambiamento concettuale per cui le discipline esplicano il loro modo sapiente di dis-intrecciare un sapere che nasce quasi sempre intrinsecamente interdisciplinare o contaminato.

Il secondo esempio ha riguardato la nascita della teoria della relatività, come espressione di interdisciplinarietà nella ridefinizione delle discipline a inizio '900. In particolare si è data particolare attenzione al confronto dialettico tra le visioni

¹ Cfr. BRANCHETTI, CATTABRIGA, LEVRINI 2019.

sostanzialiste (Minkowski) e relazioniste (Einstein, Poincaré) che hanno spinto i fisici/matematici di allora a correggere/interpretare la geometria descrittiva dello spazio-tempo secondo approcci epistemologici nuovi.

Un'ultima esemplificazione della potenza che l'approccio storico ha per la costruzione di forme di pensiero interdisciplinari è stata proposta dalla professoressa Paola Fantini, docente di matematica e fisica nel Liceo scientifico, da anni collaboratrice della relatrice: il percorso, che si sta costruendo all'interno del progetto Erasmus + IDENTITIES, ha sviluppato in modo interconnesso la costruzione disciplinare del moto parabolico e parallelamente dello studio analitico della parabola.



Figura 3. La Prof.ssa Fantini nel corso del seminario.

Non bisogna quindi assolutamente perdere la centralità della disciplina, perché l'organizzazione delle sue conoscenze ha una sua potenza ontologica, epistemologica, metodologica ed esplicativa ancora impagabile per formare il pensiero.

Però è altrettanto impagabile il ruolo, sempre più emergente e necessario nei processi didattici, dell'interdisciplinarietà, perché essa permette, da una parte, di “tagliare” la conoscenza nelle sue giunture naturali e, dall'altra, di confrontare diverse forme di organizzazione della conoscenza, mostrando la bellezza delle forme di pensiero che le discipline scientifiche hanno elaborato per dare spiegazione alla natura.

L'evento svolto lascia un'eredità assolutamente non banale ai molti docenti delle scuole secondarie che vi hanno partecipato (quasi una quarantina) e interessanti spunti di riflessione anche ai ricercatori e studenti universitari presenti. Interiorizzare gli aspetti epistemologici disciplinari per offrirne un'integrazione che consenta agli alunni di affrontare le prove dell'Esame di Stato non come esercizio procedurale è un obiettivo ancora da perseguire; sicuramente i percorsi da attivare nella pratica didattica ora sono arricchiti dalla prospettiva pedagogica presentata in questo proficuo incontro.

BIBLIOGRAFIA

BRANCHETTI L., CATTABRIGA A., LEVRINI O.

2019, «Interplay between mathematics and physics to catch the nature of a scientific breakthrough: The case of the blackbody», *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 15, 020130, pp. 1 – 21, DOI: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.020130.

SITI WEB (PER APPROFONDIRE)

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA

2018, *Esami di Stato del secondo ciclo di istruzione a. s. 2018/2019 D.M. 769 del 26 Novembre 2018*,

<<https://www.miur.gov.it/-/esami-di-stato-del-secondo-ciclo-di-istruzione-a-s-2018-2019-d-m-769-del-26-novembre-2018>>, sito consultato il 22/1/2020.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE – PIANO LAUREE SCIENTIFICHE

<<https://www.units.it/iniziative-le-scuole/piano-lauree-scientifiche>>, sito consultato il 22/1/2020.

VALENTINA BOLOGNA

Dipartimento di Fisica, Università di Trieste
valentina.bologna@phd.units.it

MARIA PERESSI

Dipartimento di Fisica, Università di Trieste
peressi@units.it

FRANCESCO LONGO

Dipartimento di Fisica, Università di Trieste
francesco.longo@ts.infn.it

GIORGIO PASTORE

Dipartimento di Fisica, Università di Trieste
pastore@units.it