

*Problemi aritmetici di tipo verbale: un'analisi dei fattori che contribuiscono alla loro difficoltà**

ELEONORA DOZ

Dipartimento di Scienze della Vita
Università di Trieste
eleonora.doz@phd.units.it

ELISA COLOMBINI

Evolutiva_mente Lab
Università di Trieste
elisa.colombini@studenti.units.it

ALESSANDRO CUDER

Dipartimento di Scienze della Vita
Università di Trieste
alessandro.cuder@phd.units.it

SANDRA PELLIZZONI

Dipartimento di Scienze della Vita
Università di Trieste
spellizzoni@units.it

MARIA CHIARA PASSOLUNGI

Dipartimento di Scienze della Vita
Università di Trieste
passolu@units.it

ABSTRACT

Solving arithmetic word problems is a fundamental skill that children must learn in the learning of mathematics. However, many students perform weakly on these tasks, even if they can successfully solve corresponding arithmetic computation exercises. This suggests that aspects other than mathematical skills contribute to problem solving success. The present contribution gives an overview of the research literature on word problems and identifies three factors behind students' difficulties: (a) word problem attributes, (b) individual capabilities, and (c) environmental factors. We will discuss the impact of each component on word problem solving skills and explain the need to consider all factors when developing efficient intervention

* Title: Arithmetic word problems: an analysis of factors underlying their difficulty.

programs. Implications in terms of educational practices are also discussed.

PAROLE CHIAVE

APPRENDIMENTO MATEMATICO / MATHEMATICAL LEARNING; PROBLEMI ARITMETICI / ARITHMETIC WORD PROBLEMS; DIFFICOLTÀ / DIFFICULTY; SCUOLA PRIMARIA / PRIMARY SCHOOL.

1. INTRODUZIONE

Le competenze e le conoscenze in matematica sono fondamentali per affrontare con successo numerose sfide della società moderna¹. Quotidianamente ci viene chiesto, ad esempio, di elaborare informazioni numeriche come calcolare il tempo necessario per raggiungere una destinazione, fare la spesa, valutare la convenienza di un prodotto. Delle buone abilità matematiche, però, non permettono soltanto di affrontare al meglio le attività di ogni giorno, ma sembrerebbero anche «predire le abilità in ambito scolastico, occupazionale e finanziario, lo status socio-economico, il benessere sociale e la salute»² delle persone.

Ad oggi, numerosi studi sulle *abilità matematiche* hanno indagato soprattutto la dimensione del *calcolo*, trascurando come questa si declini nella risoluzione dei *problemi aritmetici di tipo verbale*. Essi sono una particolare tipologia di problemi matematici in cui la situazione problematica viene presentata verbalmente con un testo contenente dei dati numerici e la soluzione può essere ottenuta attraverso delle operazioni aritmetiche³. Un esempio di problema aritmetico verbale è rappresentato dal seguente compito:

Matteo ha acquistato 5 magliette a 6 euro ciascuna e un paio di jeans a 32 euro. Quanto ha speso in tutto?

Come sottolineano anche le direttive del MIUR⁴, i problemi verbali costituiscono un aspetto fondamentale del curriculum matematico, nonché dell'apprendimento in generale. L'abilità di soluzione permette ai bambini di imparare a selezionare e mettere in atto strategie per far fronte a problemi di vita quotidiana⁵ e promuove

¹ Cfr. DOZ, COTIČ, FELDA, 2021.

² Cfr. CUDER et al. 2020, p. 51.

³ Cfr. VERSCHAFFEL, GREER, DE CORTE 2000.

⁴ Cfr. MIUR 2007.

⁵ Cfr. SWANSON, BEEBE-FRANKENBERG 2004.

l'applicazione delle conoscenze matematiche apprese in classe ai contesti del mondo reale⁶. Infatti, nella vita di tutti i giorni, i problemi matematici non si presentano come delle espressioni aritmetiche pronte a essere risolte, ma spesso hanno la forma di situazioni che devono essere interpretate e manipolate⁷. Inoltre, l'abilità di *problem solving* matematico è strettamente legata allo sviluppo del pensiero creativo⁸ ed è un predittore del salario in età adulta⁹.

Si è riscontrato, però, che molti bambini hanno difficoltà nella risoluzione di problemi aritmetici verbali nonostante presentino delle buone prestazioni nelle prove di calcolo aritmetico¹⁰. Lo studio di Cummins e collaboratori¹¹ ha dimostrato che quando agli alunni veniva presentato un problema aritmetico in forma di *espressione numerica*, tutti erano in grado di risolverlo correttamente, mentre solo il 29% dei bambini lo svolgeva accuratamente quando lo stesso problema veniva presentato in forma verbale.

Simili conclusioni sono state tratte da Carpenter e colleghi¹², i quali hanno trovato che le prestazioni degli alunni erano dal 10 al 30% peggiori nel caso di problemi verbali rispetto alle analoghe espressioni numeriche. Questa discrepanza nell'accuratezza delle prestazioni tra problemi in forma di espressione numerica e verbale suggerisce chiaramente che la soluzione di quest'ultimi richiede di prendere in considerazione diverse componenti rispetto la mera conoscenza di procedure aritmetiche.

Data l'importanza dell'abilità di soluzione di problemi aritmetici verbali nel contesto scolastico e le ripercussioni sul vissuto quotidiano, risulta necessario comprendere a fondo le componenti coinvolte nello sviluppo di tale capacità. Il presente contributo ha dunque l'obiettivo di illustrare e analizzare i principali fattori alla base delle difficoltà nella soluzione di problemi aritmetici di tipo verbale, evidenziando delle possibili implicazioni didattiche per promuovere migliori abilità di *problem solving* matematico.

⁶ Cfr. CHAPMAN 2006; PONGSAKDI et al. 2020.

⁷ Cfr. CUMMINS 1991.

⁸ Cfr. VERSCHAFFEL et al. 2020.

⁹ Cfr. MURNANE et al. 2001.

¹⁰ Cfr. HEGARTY, MAYER, GREEN 1992; HEGARTY, MAYER, MONK 1995; LEWIS, MAYER 1987; VERSCHAFFEL 1994.

¹¹ Cfr. CUMMINS et al. 1988.

¹² Cfr. CARPENTER et al. 1980.

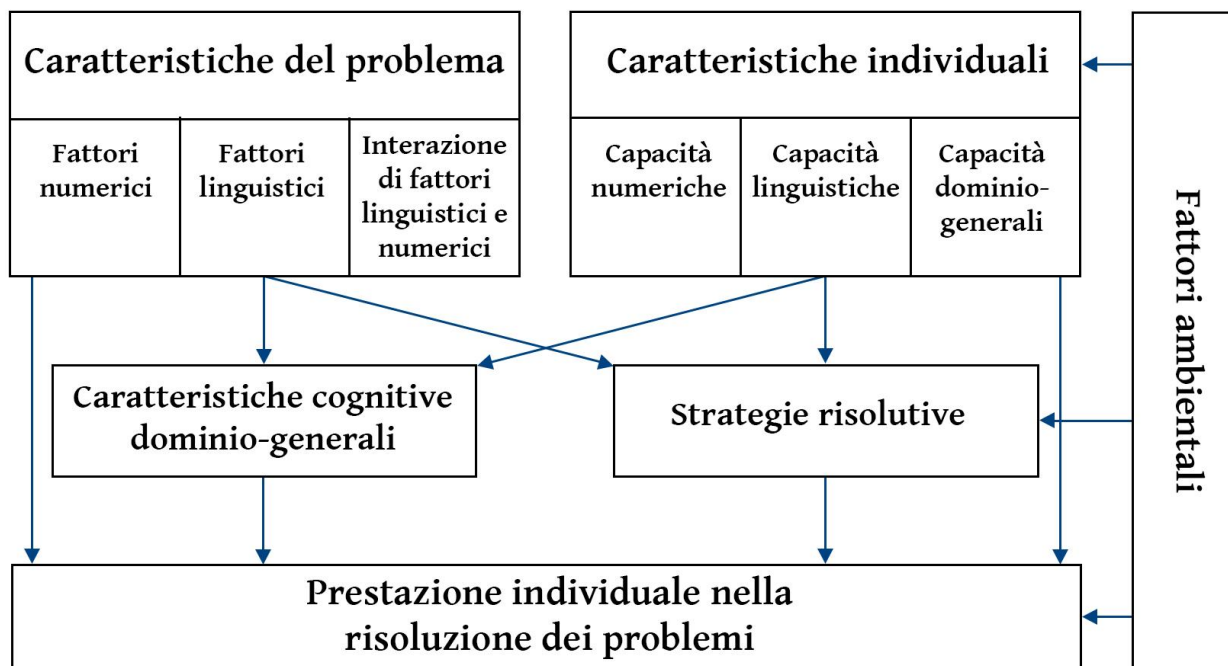


Figura 1. Un modello per comprendere le difficoltà nella soluzione di problemi aritmetici di tipo verbale. Il modello descrive tre aspetti che predicano la prestazione in tali compiti matematici: (a) le caratteristiche del problema, (b) le caratteristiche individuali e (c) i fattori ambientali. Le caratteristiche del problema che influenzano la difficoltà del compito vengono suddivise in *caratteristiche linguistiche* (es. lunghezza del problema), *caratteristiche numeriche* (es. la difficoltà dei calcoli) e *l'interazione tra queste due* (es. presenza di parole semanticamente legate a un'operazione aritmetica). Le *caratteristiche individuali* riguardano, invece, le capacità numeriche, quelle linguistiche e le abilità dominio-general, come la memoria di lavoro. Le caratteristiche dello stimolo e le capacità individuali influenzano la prestazione di problemi verbali sia direttamente sia indirettamente, incidendo sulle caratteristiche cognitive dominio-general, come ad esempio il carico cognitivo, e sulla scelta delle strategie risolutive. Il terzo fattore è *l'ambiente* (es. il metodo di insegnamento) che incide sulle capacità individuali, l'applicazione della strategia risolutiva e la prestazione in *problem solving* matematico (Fonte: DAROCZY et al. 2015).

2. DIFFICOLTÀ NELLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI ARITMETICI

Daroczy e colleghi¹³ hanno sviluppato un modello (cfr. Figura 1), secondo il quale ci sarebbero tre aspetti rilevanti che predicano la *performance* (il successo o le difficoltà) nella soluzione di problemi aritmetici di tipo verbale:

- Caratteristiche del problema;
- Caratteristiche individuali;
- Fattori ambientali.

¹³ Cfr. DAROCZY et al. 2015.

2.1 CARATTERISTICHE DEL PROBLEMA

È stato riscontrato che i bambini presentano maggiori difficoltà nella risoluzione di alcune tipologie di problemi rispetto ad altre¹⁴. Pertanto, il primo aspetto che deve essere preso in considerazione quando si affronta il tema della difficoltà nella soluzione di problemi aritmetici verbali, riguarda la *complessità del compito*. Le ricerche in questo settore evidenziano che la complessità del problema verbale dipende sia da caratteristiche numeriche sia da quelle linguistiche, nonché da un'interazione tra queste due¹⁵.

Per quanto concerne le *caratteristiche numeriche* del problema, esse possono aumentare, o diminuire, la complessità e la difficoltà dei calcoli necessari per risolvere un dato problema. A questo proposito, in letteratura è stato dimostrato che gli aspetti numerici come la grandezza dei numeri¹⁶ (es. numeri a una cifra vs. numeri a più cifre), la tipologia dei numeri¹⁷ (es. numeri naturali, interi, razionali), il numero di operazioni aritmetiche necessarie per risolvere il problema¹⁸ (es. una operazione vs. più operazioni) e la presenza di informazioni numeriche irrilevanti¹⁹ (es. L'album delle figurine di Luca ha 28 pagine e in ogni pagina ci sono 8 figurine. *Luca ha impiegato 10 mesi per completarlo*. Quante figurine ci sono in tutto?) possono influire sulla correttezza dei calcoli. A ciò va aggiunto anche il cosiddetto *carry-borrow effect*²⁰, ovvero l'effetto delle addizioni con riporto e delle sottrazioni con prestito.

In particolare, nelle addizioni con riporto, la somma delle cifre delle unità supera 9 e la decina della somma viene riportata come un ulteriore addendo nella colonna delle decine. Un esempio di tale operazione aritmetica è $14+19=33$, dove $4+9=13$ e la decina (1) è il riporto. Per quanto riguarda le sottrazioni con prestito o cambio, quando si sottrae le unità e ci si accorge di sottrarre più della quantità che si ha a disposizione, si rende necessario prendere “in prestito” una decina dal minuendo. Un esempio di

¹⁴ Cfr. BOONEN, JOLLES 2015.

¹⁵ Cfr. DAROCZY et al. 2015; DAROCZY et al. 2020b.

¹⁶ Cfr. LEAN et al. 1990; HAGHVERDI, SEMNANI, SEIFI 2012.

¹⁷ Cfr. DE CORTE et al. 1988; RADUAN 2010.

¹⁸ Cfr. DUQUE DE BLAS, GÓMEZ-VEIGA, GARCÍA-MADRUGA 2021.

¹⁹ Cfr. NG, LEE, KHNG 2017; KINGS DORF, KRAWEC 2014.

²⁰ Cfr. ARTEMENKO et al. 2018; FÜRST, HITCH 2000.

sottrazione con prestito è $33-14=19$, dove dal 3 si dovrebbe sottrarre un numero più grande (4), il che è possibile soltanto prendendo una decina del minuendo.

Il lavoro di Daroczy e collaboratori²¹ ha dimostrato in un campione di studenti universitari che i problemi che richiedono operazioni con riporto o prestito risultano più complessi da risolvere rispetto ai problemi che non richiedono tali operazioni.

Ulteriori caratteristiche del compito che sono state esaminate in letteratura riguardano le variabili legate alla *formulazione linguistica del problema*, come la lunghezza del testo²², la complessità grammaticale²³, l'ordine delle frasi del problema²⁴, la presenza di informazioni linguistiche irrilevanti o implicite²⁵ e l'uso di parole ambigue²⁶. Ad esempio, problemi grammaticalmente più complessi, come quelli che utilizzano le forme passive dei verbi, risultano più difficili da risolvere rispetto a quelli che utilizzano forme verbali più semplici²⁷.

I risultati di questi studi hanno indicato che una grande proporzione di varianza nella difficoltà dei problemi può essere spiegata da *fattori linguistici*²⁸. Una maggiore complessità linguistica della consegna aumenta la richiesta di risorse cognitive²⁹ necessarie per poter comprendere il testo, ovvero per elaborare le informazioni in esso contenute e le loro reciproche relazioni.

Infine, gli studi di settore hanno fatto emergere anche un ruolo dell'interazione tra fattori linguistici e numerici³⁰. Si tratta della presenza nel testo di specifiche parole-chiave o espressioni verbali che sono semanticamente legate a un'operazione aritmetica. Un esempio di tali parole-chiave è il termine di relazione *in più* che è tipicamente associato all'addizione.

²¹ Cfr. DAROCZY et al. 2020b.

²² Cfr. LOFTUS, SUPPES 1972.

²³ Cfr. SCHLAGER, KAULVERS, BÜCHTER 2017.

²⁴ Cfr. CUMMINS et al. 1988.

²⁵ Cfr. MUTH 1992.

²⁶ Cfr. SHAFTEL et al. 2006.

²⁷ Cfr. ABEDI, LORD 2001.

²⁸ Cfr. LOFTUS, SUPPES 1972; JERMAN 1974; MUTH 1992.

²⁹ Cfr. DAROCZY et al. 2015.

³⁰ Cfr. DUQUE DE BLAS, GÓMEZ-VEIGA, GARCÍA-MADRUGA 2021; NG, LUNG, CHANG 2021; PAPE 2003.

Nel caso in cui il significato usuale del *cue*³¹ verbale coincida con l'operazione aritmetica necessaria per risolvere correttamente il problema (ad es.: «Marta ha mangiato 7 biscotti. Laura ne ha mangiati 2 *in più* rispetto a Marta. Quanti biscotti ha mangiato Laura?»), il compito viene svolto accuratamente da più studenti rispetto a quando l'usuale *cue* verbale non richiami direttamente l'operazione aritmetica da applicare³² (ad es.: «Marta ha mangiato 7 biscotti. Marta ne ha mangiati 2 *in più* rispetto a Laura. Quanti biscotti ha mangiato Laura?»; in questo caso bisogna effettuare una sottrazione). Tale fenomeno è noto in letteratura come *effetto congruenza*³³.

2.2 CARATTERISTICHE INDIVIDUALI

Sebbene l'analisi delle caratteristiche dei problemi abbia fornito dati molto importanti per la predizione delle prestazioni nel *problem solving* matematico, esse non sono sufficienti a spiegare le difficoltà in tali compiti. Alcuni bambini, infatti, risolvono uno stesso problema verbale con facilità mentre altri non vi riescono. Ciò dimostra che le difficoltà nella soluzione di problemi aritmetici verbali dipendano anche dai *profili cognitivi* dei singoli individui. Pertanto, risulta ragionevole chiederci quali abilità cognitive siano coinvolte nel *problem solving* matematico e quali di esse distinguano i solutori abili da quelli meno abili.

Negli ultimi cinquant'anni un vasto numero di studi ha messo in luce che l'abilità di soluzione di problemi aritmetici verbali è una competenza multi-sfaccettata che coinvolge diverse capacità cognitive³⁴. Tra queste, come sarà facile intuire, svolgono un ruolo fondamentale le *abilità aritmetiche*, ovvero le conoscenze concettuali e procedurali specifiche del dominio della matematica, che permettono di svolgere adeguatamente gli algoritmi aritmetici necessari ai fini della soluzione³⁵. Nei lavori di Fuchs e collaboratori³⁶,

³¹ Il termine *cue* è un termine tecnico che deriva dall'inglese e significa indizio, stimolo capace di rievocare facilmente delle informazioni o un dato ricordo.

³² Cfr. HEGARTY et al. 1992; PAPE 2003.

³³ Cfr. LEWIS, MAYER 1987.

³⁴ Cfr. VERSCHAFFEL et al. 2020; LIN 2020.

³⁵ Cfr. KAIL, HALL 1999.

³⁶ Cfr. FUCHS et al. 2006; FUCHS et al. 2018.

per esempio, è emerso che le *abilità di calcolo* sono dei predittori significativi della capacità di soluzione di problemi aritmetici in bambini di 7 e 8 anni.

Ciononostante, i loro studi hanno dimostrato che, sebbene le capacità di calcolo siano essenziali, esse non sono sufficienti per risolvere correttamente un problema matematico. La soluzione di questi compiti richiede, infatti, anche buone abilità linguistiche, necessarie a comprendere e processare le informazioni verbali presenti nel testo, in modo da costruire una rappresentazione mentale adeguata della situazione descritta dal problema³⁷. A conferma di ciò, numerosi lavori presenti in letteratura hanno rilevato un'associazione tra la *performance* in compiti di *problem solving* aritmetico e comprensione del testo³⁸. In particolare, è stato dimostrato che i bambini che erano più abili nella comprensione del testo risolvevano con maggiore accuratezza i problemi aritmetici verbali.

Tuttavia, altri studi di settore hanno fatto emergere come accanto all'influenza di abilità aritmetiche e linguistiche, vi sia anche un ruolo di abilità cognitive di carattere generale³⁹. Tra queste risultano fondamentali il *ragionamento non verbale* e i *processi attentivi*, i quali permetterebbero di formulare una rappresentazione mentale coerente del problema e di adottare strategie risolutive adeguate alla tipologia del compito⁴⁰.

Inoltre, svolge un ruolo fondamentale anche la *memoria di lavoro*, definita come uno spazio mentale che permette di ritenere temporaneamente e di manipolare un numero limitato di informazioni durante l'esecuzione di diversi compiti cognitivi⁴¹. Nel caso dei problemi verbali, essa è responsabile del mantenimento delle informazioni linguistiche rilevanti per la creazione della rappresentazione mentale della situazione descritta; permette lo svolgimento di calcoli complessi ed è coinvolta nel controllo richiesto durante la pianificazione e lo svolgimento del problema⁴². Essendo implicata in molteplici processi,

³⁷ Cfr. PONGSAKDI et al. 2020.

³⁸ Cfr. BOONEN et al. 2016; BOONEN et al. 2013; SWANSON, COONEY, BROCK 1993; VILENIUS-TUOHIMAA, AUNOLA, NURMI 2008.

³⁹ Cfr. LIN 2020.

⁴⁰ Cfr. FUCHS et al. 2005; FUCHS et al. 2006; FUCHS et al. 2010.

⁴¹ Cfr. BADDELEY 2000.

⁴² Cfr. WANG, FUCHS, FUCHS 2016.

la memoria di lavoro deve disporre di risorse sufficienti per poter mantenere attive tutte le informazioni necessarie allo svolgimento delle varie fasi del problema.

Anche le *funzioni esecutive* risultano essere connesse alla corretta risoluzione di un problema matematico⁴³. Esse sono definite come una serie di abilità cognitive che consentono a un individuo di controllare e regolare pensieri e azioni quando si ritrova in situazioni nuove o complesse. Più nello specifico, le funzioni esecutive che sembrano giocare un ruolo nella soluzione dei problemi sono l'*aggiornamento*, ovvero l'abilità di aggiornare le informazioni, e l'*inibizione*, ossia l'abilità di sopprimere le informazioni irrilevanti e le risposte automatiche inappropriate.

Durante la soluzione di un problema di tipo verbale è necessario, infatti, elaborare un elevato numero di informazioni. Ogni nuova informazione in ingresso deve essere integrata con quelle precedenti, richiedendo di aggiornare le informazioni già processate (*aggiornamento*) e, eventualmente, di scartare quelle irrilevanti (*inibizione*)⁴⁴. A conferma di questo dato, gli studi di Passolunghi e Siegel⁴⁵, mostrano che la prestazione in compiti di memoria dei solutori meno abili è caratterizzata da un elevato numero di informazioni irrilevanti. Tali risultati indicano che i solutori meno abili tendono a mantenere attive in memoria delle informazioni che inizialmente è necessario elaborare, ma che poi devono essere scartate e soppresse, in quanto irrilevanti per il compito. Inoltre, alcuni studi sembrano suggerire che l'inibizione sia coinvolta anche nella risoluzione di quei problemi, in cui è necessario sopprimere una strategia di soluzione iper-appresa, ovvero una strategia che è stata acquisita e applicata meccanicamente fino alla sua automatizzazione, che risulta tuttavia inadeguata per svolgere un dato compito⁴⁶. Sembrerebbe dunque che le funzioni esecutive siano maggiormente coinvolte nella soluzione di problemi particolarmente complessi che richiedono un maggiore controllo cognitivo, come ad esempio problemi che coinvolgono l'inibizione di

⁴³ Cfr. AGOSTINO, JOHNSON, PASCUAL-LEONE 2010; KOTSPOULOS, LEE 2012; MORI, OKAMOTO 2017; PASSOLUNGI, PAZZAGLIA 2004; PASSOLUNGI, PAZZAGLIA 2005.

⁴⁴ Cfr. PASSOLUNGI, PAZZAGLIA 2004; PASSOLUNGI, PAZZAGLIA 2005.

⁴⁵ Cfr. PASSOLUNGI, SIEGEL 2001; PASSOLUNGI, SIEGEL 2004.

⁴⁶ Cfr. KHNG, LEE 2009; LUBIN et al. 2013; SHUM, CHAN 2020.

informazioni irrilevanti o di strategie risolutive iper-apprese e inadeguate.

2.3 FATTORI AMBIENTALI

Diversi studi sull'apprendimento matematico hanno dimostrato come anche l'*ambiente educativo* influenza il modo in cui gli studenti risolvono problemi aritmetici⁴⁷: il metodo di insegnamento, le strategie di soluzione proposte agli studenti, l'atteggiamento degli insegnanti o dei genitori nei confronti della matematica, l'uso di strumenti tecnologici o libri di testo, sono tutti fattori che possono influenzare il successo nel *problem solving* matematico.

Per esempio, per quanto concerne lo *stile di insegnamento*, il recente lavoro di Daroczy e colleghi⁴⁸ ha messo in luce due scelte didattiche che promuovono una migliore abilità di soluzione, specialmente nel caso di problemi particolarmente complessi:

- lo sviluppo di un clima supportivo, caratterizzato da una buona relazione insegnante-studente, dallo scambio di *feedback* costruttivi e da un approccio positivo verso gli errori;
- il metodo di insegnamento basato sull'attivazione cognitiva, in cui l'insegnante vuole stimolare cognitivamente gli studenti proponendo esercizi sfidanti (non troppo semplici per evitare di annoiare gli alunni, non troppo difficili per evitare di demotivarli).

Il clima supportivo e la presenza di *feedback* costruttivi favorirebbero il benessere in classe aumentando la motivazione e riducendo l'ansia degli alunni, mentre l'insegnamento basato sull'*attivazione cognitiva* promuoverebbe la riflessione ed il ragionamento, nonché favorirebbe l'applicazione di diverse strategie di risoluzione. Pertanto, gli insegnanti che si impegnano a sviluppare un'atmosfera positiva in classe e propongono agli alunni esercizi stimolanti promuoverebbero dei significativi miglioramenti nell'abilità di soluzione di problemi verbali complessi.

⁴⁷ Cfr. CARRAHER, CARRAHER, SCHLIEMANN 1985; DE CORTE, VERSCHAFFEL 1987; LEAN, CLEMENTS, DEL CAMPO 1990; PIMTA, TAYRAUKHAM, NUANGCHALERM 2009.

⁴⁸ Cfr. DAROCZY et al. 2020a.

Un secondo aspetto ambientale degno di considerazione, riguarda i *libri di testo*, uno strumento frequentemente utilizzato nell'apprendimento matematico⁴⁹. A questo proposito, si è riscontrato che i libri di testo in matematica differiscono in base alla proposta delle diverse tipologie di problemi⁵⁰. Ad esempio, alcuni libri di testo prediligono problemi che richiedono l'applicazione meccanica di procedure aritmetiche a scapito di problemi di ragionamento⁵¹. Proprio questa discrepanza potrebbe esacerbare la difficoltà dei bambini nell'affrontare i problemi verbali, in quanto essi vengono abituati a risolvere solamente alcune tipologie di problemi.

3. IMPLICAZIONI DIDATTICHE

In base alla letteratura illustrata nella sezione precedente è possibile proporre alcune considerazioni al fine di promuovere migliori abilità di soluzione di problemi aritmetici verbali. In questa sezione si presenteranno due possibili implicazioni in ambito didattico. La prima considerazione riguarda l'importanza di una strategia risolutiva basata sulla rappresentazione mentale del problema. Infatti, come osservato nella presente disamina della letteratura, le difficoltà di soluzione emergono quando il solutore si crea un modello mentale del problema più povero⁵², basato sull'individuazione di dati numerici e parole-chiave, o una rappresentazione che contiene elementi superflui⁵³. Nel primo caso, si è visto che alcune specifiche espressioni verbali presenti nel testo del problema (es. il termine di relazione *in più* o il termine di relazione *in meno*) attivano automaticamente una strategia di soluzione superficiale basata sulla parola-chiave (es. «se *più* allora addizione, se *meno* allora sottrazione») che spesso non permette di risolvere correttamente il compito. Nel secondo caso, invece, la letteratura ha evidenziato che i solutori con scarse capacità cognitive di base, come l'aggiornamento o l'inibizione, mantengono attive in memoria informazioni irrilevanti che interferiscono

⁴⁹ Cfr. OATES 2014.

⁵⁰ Cfr. VERSCHAFFEL et al. 2020.

⁵¹ Per quanto riguarda i libri di testo spagnolo, cfr. VICENTE, SANCHEZ, VERSCHAFFEL 2020.

⁵² Cfr. HEGARTY, MAYER, MONK 1995.

⁵³ Cfr. PASSOLUNGI, CORNOLDI, DE LIBERTO 1999.

negativamente con il processo risolutivo.

Costruire una rappresentazione adeguata del problema, ovvero un *modello mentale* in cui sono presenti tutti gli elementi fondamentali per risolvere un dato problema, è tuttavia fondamentale, in quanto consente di cogliere correttamente la relazione fra i dati, permettendo un'accurata soluzione del compito. A tal proposito, gli insegnanti di matematica dovrebbero promuovere, fin dai primi anni di scolarizzazione, l'importanza delle strategie basate sulla creazione di una rappresentazione completa del problema ed evitare, al contrario, di proporre delle strategie meramente basate sull'identificazione di parole-chiave.

Un modo per aiutare il bambino nel rappresentare i problemi, è quello di utilizzare degli oggetti da manipolare, come blocchi, pupazzi, figurine, oppure rappresentazioni grafiche, come diagrammi, schemi, disegni e linee numeriche⁵⁴.

Problema: *La mamma di Maria ha comprato 20 caramelle, tutte alla fragola o alla menta. Tra queste caramelle, solo 6 sono alla menta. Ciascuna caramella costa 1,15 €. Quante sono le caramelle alla fragola?*

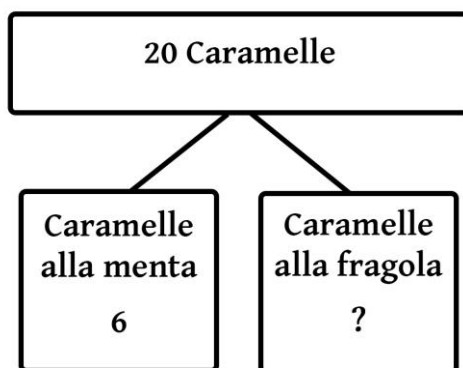


Figura 2. Esempio di strategia di soluzione basata sullo schema grafico con diagramma (Fonte: POWELL 2011).

La possibilità di manipolare concretamente le variabili numeriche presenti nel problema consente di integrare più facilmente le informazioni, riconoscendo quelle funzionali alla soluzione e quelle irrilevanti⁵⁵. In particolare, nel contesto scolastico sarebbe utile l'utilizzo di una strategia basata sugli schemi grafici o diagrammi. Infatti, essi consentono di

⁵⁴ Cfr. FUCHS et al. 2003; POWELL 2011; VAN GARDEREN 2007.

⁵⁵ Cfr. D'AMICO, LA PORTA 2010.

riflettere sugli elementi necessari per risolvere il problema; permettono di organizzare le informazioni e stimolano così il riconoscimento della struttura matematica sottostante; facilitano il collegamento fra dati ed operazioni⁵⁶ (cfr. Figura 2).

La seconda considerazione riguarda la varietà delle tipologie di problemi proposta ai bambini della Scuola primaria. Una didattica che sceglie di “addestrare” gli alunni ad affrontare solo problemi standardizzati, ovvero problemi con la stessa struttura profonda, ma con dati numerici diversi, genera degli stereotipi interpretativi che si rafforzano nel tempo (es. «Il testo del problema contiene tutti e solo i dati necessari per la soluzione», «Ogni problema ha sempre una soluzione», «Ogni problema ha un’unica soluzione», «Vi sono parole-chiave nel problema che suggeriscono le operazioni da svolgere», ecc.)⁵⁷. Ciò indurrà gli allievi a sviluppare una strategia risolutiva superficiale che non mira alla comprensione profonda del problema.

A tal proposito, risulta utile alternare problemi routinari, ovvero problemi che vengono risolti utilizzando regole o nozioni già apprese e che aiutano il bambino ad automatizzare le procedure di calcolo, e problemi non routinari, che invece spingono il bambino a ragionare e a trovare una soluzione cercando innanzitutto di comprendere la situazione problematica. In questa seconda categoria di problemi rientrano, ad esempio, quelli con dati mancanti o non risolubili, come il problema dell’età del capitano descritto da Baruk⁵⁸:

Su una nave ci sono 26 pecore e 10 capre. Qual è l’età del capitano?

Gli alunni spesso risolvono tale problema combinando i due numeri a disposizione. Tuttavia, il solutore deve realizzare che i dati numerici presenti nell’enunciato non sono utili per determinare l’età del capitano, in quanto le variabili sono slegate tra di loro, e pertanto non è possibile giungere a una soluzione. Similmente accade nel seguente problema presentato da Ferrari⁵⁹:

⁵⁶ Cfr. POWELL 2011.

⁵⁷ Cfr. ZAN 2016.

⁵⁸ Cfr. BARUK 1985.

⁵⁹ Cfr. FERRARI 2009.

La maestra incarica Eugenio di contare gli alunni della prima A e Rolando di contare gli alunni della prima B. Eugenio impiega 5 minuti per svolgere il suo compito mentre Rolando ne impiega 7. Sono di più gli alunni della prima A o della prima B?

I bambini, facendo riferimento ai dati nel testo, potrebbero pensare che gli alunni della prima B siano più numerosi in quanto Rolando ha impiegato più tempo per contarli. Anche in questo caso, però, non è possibile giungere a una soluzione in base alle informazioni presenti nella consegna: Rolando potrebbe aver impiegato più tempo perché è più lento nel contare, oppure perché ha contato gli alunni due volte. Oltre a problemi insolubili è utile proporre agli alunni anche problemi che possono ammettere più di una soluzione o addirittura infinite⁶⁰. Segue un esempio di tale tipologia:

Erica e Mario sono cugini e fra loro ci sono 5 anni di differenza. Quanti possono essere gli anni di Erica e quanti quelli di Mario?

Il problema sopraccitato ammette infinite soluzioni date dalle coppie ordinate $(n, n + 5)$, dove n è il numero degli anni di uno dei due cugini. I bambini spesso si trovano disorientati davanti a questo problema; si aspettano di conoscere l'età esatta di uno dei due cugini per poter fornire una soluzione.

A tal proposito, Gallopin⁶¹ ha sviluppato dei percorsi didattici laboratoriali per gli alunni della Scuola primaria e Scuola secondaria di primo e secondo grado finalizzati al ragionamento intorno a problemi con più soluzioni. Ai bambini della Scuola primaria, per esempio, veniva presentato un problema che ammette più soluzioni (ad es.: «Franco deve spedire un pacco a suo zio Bollo. Il costo di spedizione è di 3,40 €. A casa sua ci sono 20 francobolli da 0,20 € e 10 da 0,50 €. Quanti e quali ne deve usare per spedire il pacco?») e si chiedeva loro di risolverlo per tentativi attraverso delle attività ludiche (es. ai bambini venivano forniti francobolli da 0,20 € e da 0,50 € e dei pacchi da spedire). Tali percorsi laboratoriali permettono agli studenti di sviluppare l'idea che una situazione problematica non è sempre risolvibile e che quando lo è, la

⁶⁰ Cfr. CANETTA, MANARA, MARCHI 1986.

⁶¹ Cfr. GALLOPIN 2012.

soluzione non è necessariamente unica. Questa idea guida poi gli alunni ad utilizzare con maggiore consapevolezza le strategie risolutive adeguate.

4. CONCLUSIONI

L'attività di risoluzione di problemi aritmetici di tipo verbale è particolarmente importante sia nel contesto scolastico, sia in quello extrascolastico e nella vita di tutti i giorni. Infatti, essa, a differenza dell'abilità di calcolo, fornisce agli alunni gli strumenti per poter affrontare una varietà di contesti e situazioni che si presentano quotidianamente. Al tempo stesso, però, è la pratica matematica in cui si riscontrano maggiori difficoltà da parte degli studenti.

Alla luce della presente disamina della letteratura scientifica emerge come le prestazioni in quest'ambito dipendono da molteplici fattori che, interagendo tra di loro, possono provocare l'affiorare di specifiche difficoltà di soluzione.

In primo luogo, alcune caratteristiche del problema, come quelle linguistiche e quelle numeriche, possono aumentare la complessità del compito, aumentando di conseguenza il carico cognitivo. Quando tale carico supera le risorse cognitive proprie dell'individuo, emerge una difficoltà di soluzione.

In secondo luogo, le capacità cognitive del singolo individuo giocano un ruolo significativo nel predire le prestazioni nella soluzione di problemi matematici. Le difficoltà possono essere ricondotte a una carenza specifica di una o più abilità cognitive, come l'abilità numerica, l'abilità linguistica e le capacità cognitive trasversali. Queste ultime rivestono un ruolo particolarmente importante, in quanto sono coinvolte in numerose fasi del processo di soluzione e permettono al solutore di crearsi una rappresentazione mentale adeguata del problema, che risulta essere cruciale per una corretta soluzione.

Infine, è necessario prendere in considerazione anche i fattori ambientali, come ad esempio la qualità del metodo di insegnamento o i libri di testo adottati. Spesso, però, tali aspetti vengono trascurati quando si sviluppano degli interventi didattici mirati a promuovere migliori abilità di *problem solving*, indirizzandosi unicamente alle lacune degli alunni nelle

abilità cognitive. L'ambiente, tuttavia, influenza significativamente il modo in cui i bambini affrontano un problema verbale, in particolare determinando le loro capacità cognitive, il loro stato d'animo e motivazione, nonché la scelta della strategia risolutiva da applicare. Pertanto, nel promuovere migliori abilità di soluzione risulta indispensabile considerare la molteplicità di fattori che influenzano tale capacità, nonché essere consapevoli che i bambini con prestazioni deficitarie in quest'ambito potrebbero necessitare di interventi di recupero diversi.

Ad oggi, tuttavia, rimane ancora poco chiaro il ruolo di fattori emotivi e motivazionali nella risoluzione di problemi verbali in bambini in età scolare. Infatti, diversi studi hanno dimostrato che alle difficoltà di soluzione spesso si associano atteggiamenti caratterizzati da demotivazione, ansia ed evitamento a eseguire compiti matematici⁶². Auspichiamo che ricerche future siano in grado di fornire un quadro globale ed esaustivo del fenomeno, includendo fattori cognitivi, emotivo-motivazionali e ambientali nell'indagine dell'abilità di *problem solving* migliorando le abilità dei cittadini del futuro in questa rilevante competenza matematica.

BIBLIOGRAFIA

ABEDI J., LORD C.

2001, «The language factor in mathematics tests», *Applied measurement in education*, 14(3), pp. 219-234.

AGOSTINO A., JOHNSON J., PASCUAL-LEONE J.

2010, «Executive functions underlying multiplicative reasoning: Problem type matters», *Journal of experimental child psychology*, 105(4), pp. 286-305.

ARTEMENKO C., PIXNER S., MOELLER K., NUERK H. C.

2018, «Longitudinal development of subtraction performance in elementary school», *British Journal of Developmental Psychology*, 36(2), pp. 188-205.

BADDELEY A.

2000, «The episodic buffer: a new component of working memory?», *Trends in cognitive sciences*, 4(11), pp. 417-423.

BARUK S.

1985, *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*, Paris, Seuil.

⁶² Cfr. DONOLATO et al. 2020; HOFFMAN 2010; JIANG et al. 2021; PASSOLUNGI, CARGNELUTTI, PELLIZZONI 2019.

- BOONEN A. J., DE KONING B. B., JOLLES J., VAN DER SCHOOT M.
2016, «Word problem solving in contemporary math education: A plea for reading comprehension skills training», *Frontiers in psychology*, 7, p. 191.
- BOONEN A. J., JOLLES J.
2015, «Second Grade Elementary School Students' Differing Performance on Combine, Change and Compare Word Problems», *International Journal of School and Cognitive Psychology*, 2(2).
- BOONEN A. J., VAN DER SCHOOT M., VAN WESEL F., DE VRIES M. H., JOLLES J.
2013, «What underlies successful word problem solving? A path analysis in sixth grade students», *Contemporary Educational Psychology*, 38(3), pp. 271-279.
- CANETTA P., MANARA C. F., MARCHI M.
1986, *Per un curriculum continuo di educazione matematica nella scuola dell'obbligo*, Milano, Quaderni IRSAE Lombardia.
- CARPENTER T. P., CORBITT M. K., KEPNER H. S., LINDQUIST M. M., REYS R. E.
1980, «Solving verbal problems: Results and implications from national assessment», *The arithmetic teacher*, 28(1), pp. 8-12.
- CARRAHER T. N., CARRAHER D. W., SCHLIEMANN A. D.
1985, «Mathematics in the streets and in schools», *British journal of developmental psychology*, 3(1), pp. 21-29.
- CHAPMAN O.
2006, «Classroom practices for context of mathematics word problems», *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), pp. 211-230.
- CUDER A., PELLIZZONI S., DE VITA C., PASSOLUNGI M. C.
2020, «Fattori emotivi e apprendimento: l'ansia per la matematica e i suoi effetti sull'apprendimento disciplinare», *QuaderniCIRD*, 20, pp. 50-63.
- CUMMINS D. D.
1991, «Children's interpretations of arithmetic word problems», *Cognition and instruction*, 8(3), pp. 261-289.
- CUMMINS D. D., KINTSCH W., REUSSER K., WEIMER R.
1988, «The role of understanding in solving word problems», *Cognitive psychology*, 20(4), pp. 405-438.
- D'AMICO A., LA PORTA R.
2010, «Il problem solving aritmetico: analisi dei processi cognitivi e metacognitivi e illustrazione del software "Risolvere problemi aritmetici"», *Italian Journal of Educational Technology*, 18(1), pp. 41-49.
- DAROCZY G., FAUTH B., CIPORA K., MEURERS D., NUERK H. C.
2020a, «The Relation of Teaching Quality to the Task Difficulty in Word Problems», *PsyArXiv*, 23 Apr. 2020.
- DAROCZY G., MEURERS D., HELLER J., WOLSKA M., NÜRK H. C.
2020b, «The interaction of linguistic and arithmetic factors affects adult performance on arithmetic word problems», *Cognitive processing*, 21(1), pp. 105-125.

DAROCZY G., WOLSKA M., MEURERS W. D., NUERK H. C.
2015, «Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty», *Frontiers in psychology*, 6, p. 348.

DE CORTE E., VERSCHAFFEL L.
1987, «The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems», *Journal for research in mathematics education*, 18(5), pp. 363-381.

DE CORTE E., VERSCHAFFEL L., VAN COILLIE V.
1988, «Influence of Number Size, Problem Structure and Response Mode on Children's Solutions of Multiplication Word Problems», *Journal of Mathematical Behavior*, 7, pp. 197-216.

DONOLATO E., TOFFALINI E., GIOFRÈ D., CAVIOLA S., MAMMARELLA I. C.
2020, «Going beyond mathematics anxiety in primary and middle school students: The role of ego-resiliency in mathematics», *Mind, Brain, and Education*, 14(3), pp. 255-266.

DOZ D., COTIČ M., FELDA D.
2021, «Vloga nacionalnih preverjanj znanja matematike», *Sodobna Pedagogika*, 72(2), pp. 110-122.

DUQUE DE BLAS G., GÓMEZ-VEIGA I., GARCÍA-MADRUGA J. A.
2021, «Arithmetic Word Problems Revisited: Cognitive Processes and Academic Performance in Secondary School», *Education Sciences*, 11(4), p. 155.

FERRARI M.
2009, *Insegnare matematica nella scuola primaria. Una proposta suddivisa per anni. Aritmetica*, Quaderno Didattico N. 21, CRDUM.

FUCHS L. S., COMPTON D. L., FUCHS D., PAULSEN K., BRYANT J. D., HAMLETT C. L.
2005, «The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty», *Journal of educational psychology*, 97(3), pp. 493-513.

FUCHS L. S., FUCHS D., COMPTON D. L., POWELL S. R., SEETHALER P. M., CAPIZZI A. M., SCHATSCHNEIDER C., FLETCHER J. M.
2006, «The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems», *Journal of Educational Psychology*, 98(1), pp. 29-43.

FUCHS L. S., FUCHS D., PRENTICE K., BURCH M., HAMLETT C. L., OWEN R., HOSP M., JANCEK D.
2003, «Explicitly teaching for transfer: Effects on third-grade students' mathematical problem solving», *Journal of Educational Psychology*, 95(2), pp. 293-305.

FUCHS L. S., GEARY D. C., COMPTON D. L., FUCHS D., HAMLETT C. L., SEETHALER P. M., BRYANT J. D., SCHATSCHNEIDER C.
2010, «Do different types of school mathematics development depend on different constellations of numerical versus general cognitive abilities?», *Developmental psychology*, 46(6), pp. 1731-1746.

FUCHS L. S., GILBERT J. K., FUCHS D., SEETHALER P. M., MARTIN B. N.
2018, «Text comprehension and oral language as predictors of word-problem solving: Insights into word-problem solving as a form of text comprehension», *Scientific Studies of Reading*, 22(2), pp. 152-166.

FÜRST A. J., HITCH G. J.
2000, «Separate roles for executive and phonological components of working memory in mental arithmetic», *Memory & cognition*, 28(5), pp. 774-782.

GALLOPIN P.

2012, «Che tombola! Così tante soluzioni da essere un problema!», *QuaderniCIRD*, 5, pp. 28-44.

HAGHVERDI M., SEMNANI A. S., SEIFI M.

2012, «The relationship between different kinds of students' errors and the knowledge required to solve mathematics word problems», *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26, pp. 649-666.

HEGARTY M., MAYER R. E., GREEN C. E.

1992, «Comprehension of arithmetic word problems: Evidence from students' eye fixations», *Journal of educational psychology*, 84(1), pp. 76-84.

HEGARTY M., MAYER R. E., MONK C. A.

1995, «Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers», *Journal of educational psychology*, 87(1), pp. 18-32.

HOFFMAN B.

2010, «“I think I can, but I'm afraid to try”: The role of self-efficacy beliefs and mathematics anxiety in mathematics problem-solving efficiency», *Journal of educational psychology Learning and individual differences*, 20(3), pp. 276-283.

JERMAN M.

1974, «Problem length as a structural variable in verbal arithmetic problems», *Educational Studies in Mathematics*, 5(1), pp. 109-123.

JIANG R., LIU R. D., STAR J., ZHEN R., WANG J., HONG W., JIANG S., SUN Y., FU X.

2021, «How mathematics anxiety affects students' inflexible perseverance in mathematics problem-solving: Examining the mediating role of cognitive reflection», *British Journal of Educational Psychology*, 91(1), pp. 237-260.

KAIL R., HALL L. K.

1999, «Sources of developmental change in children's word-problem performance», *Journal of Educational Psychology*, 91(4), pp. 660-668.

KHNG K. H., LEE K.

2009, «Inhibiting interference from prior knowledge: Arithmetic intrusions in algebra word problem solving», *Learning and Individual Differences*, 19(2), pp. 262-268.

KINGSBOROUGH S., KRAWEC J.

2014, «Error analysis of mathematical word problem solving across students with and without learning disabilities», *Learning Disabilities Research & Practice*, 29(2), pp. 66-74.

KOTSPOULOS D., LEE J.

2012, «A naturalistic study of executive function and mathematical problem-solving», *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(2), pp. 196-208.

LEAN G. A., CLEMENTS M. A., DEL CAMPO G.

1990, «Linguistic and pedagogical factors affecting children's understanding of arithmetic word problems: A comparative study», *Educational Studies in Mathematics*, 21(2), pp. 165-191.

LEWIS A. B., MAYER R. E.

1987, «Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems», *Journal of Educational psychology*, 79(4), pp. 363-371.

LIN X.

2020, «Investigating the Unique Predictors of Word-Problem Solving Using Meta-Analytic Structural Equation Modeling», *Educational Psychology Review*, 33(3), pp. 1097-1124.

LOFTUS E. F., SUPPES P.

1972, «Structural variables that determine problem-solving difficulty in computer-assisted instruction», *Journal of Educational Psychology*, 63(6), pp. 531-542.

LUBIN A., VIDAL J., LANOË C., HOUDÉ O., BORST G.

2013, «Inhibitory control is needed for the resolution of arithmetic word problems: A developmental negative priming study», *Journal of Educational Psychology*, 105(3), pp. 701-708.

MORI K., OKAMOTO M.

2017, «The role of the updating function in solving arithmetic word problems», *Journal of educational psychology*, 109(2), pp. 245-256.

MURNANE R. J., WILLETT J. B., BRAATZ M. J., DUHALDEBORDE Y.

2001, «Do different dimensions of male high school students' skills predict labor market success a decade later? Evidence from the NLSY», *Economics of Education Review*, 20(4), pp. 311-320.

MIUR

2007, *Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo*, Roma, Ministero della Pubblica Istruzione.

MUTH K. D.

1992, «Extraneous information and extra steps in arithmetic word problems», *Contemporary educational psychology*, 17(3), pp. 278-285.

NG C. T., LUNG T. C., CHANG T. T.

2021, «Operation-Specific Lexical Consistency Effect in Fronto-Insular-Parietal Network During Word Problem Solving», *Frontiers in human neuroscience*, 15.

NG J., LEE K., KHNG K. H.

2017, «Irrelevant information in math problems need not be inhibited: Students might just need to spot them», *Learning and Individual Differences*, 60, pp. 46-55.

OATES T.

2014, *Why textbooks count*, Cambridge, Cambridge assessments.

PAPE S. J.

2003, «Compare word problems: Consistency hypothesis revisited», *Contemporary educational psychology*, 28(3), pp. 396-421.

PASSOLUNGI M. C., CORNOLDI C., DE LIBERTO S.

1999, «Working memory and intrusions of irrelevant information in a group of specific poor problem solvers», *Memory & Cognition*, 27(5), pp. 779-790.

PASSOLUNGI M. C., PAZZAGLIA F.

2004, «Individual differences in memory updating in relation to arithmetic problem solving», *Learning and Individual Differences*, 14(4), pp. 219-230.

2005, «A comparison of updating processes in children good or poor in arithmetic word problem-solving», *Learning and individual differences*, 15(4), pp. 257-269.

PASSOLUNGI M. C., SIEGEL L. S.

2001, «Short-term memory, working memory, and inhibitory control in children with difficulties in arithmetic problem solving», *Journal of experimental child psychology*, 80(1), pp. 44-57.

2004, «Working memory and access to numerical information in children with disability in mathematics», *Journal of experimental child psychology*, 88(4), pp. 348-367.

PASSOLUNGI M. C., CARGNELUTTI E., PELLIZZONI S.

2019, «The relation between cognitive and emotional factors and arithmetic problem-solving», *Educational Studies in Mathematics*, 100(3), pp. 271-290.

PIMTA S., TAYRAUKHAM S., NUANGCHALERM P.

2009, «Factors Influencing Mathematic Problem-Solving Ability of Sixth Grade Students», *Journal of Social Sciences*, 5(4), pp. 381-385.

PONGSAKDI N., KAJAMIES A., VEERMANS K., LERTOLA K., VAURAS M., LEHTINEN E.

2020, «What makes mathematical word problem solving challenging? Exploring the roles of word problem characteristics, text comprehension, and arithmetic skills», *ZDM*, 52(1), pp. 33-44.

POWELL S. R.

2011, «Solving Word Problems using Schemas: A Review of the Literature», *Learning Disabilities Research & Practice*, 26(2), pp. 94-108.

RADUAN I. H.

2010, «Error analysis and the corresponding cognitive activities committed by year five primary students in solving mathematical word problems», *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2(2), pp. 3836-3838.

SCHLAGER S., KAULVERS J., BÜCHTER A.

2017, *Effects of linguistic variations of word problems on the achievement in high stakes tests*, in T. DOOLEY, G. GUEUDET (Hrsg.), *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (Dublino, Febbraio 2017)*, Dublino: DCU Institute of Education and ERME, pp. 1364-1371.

SHAFTTEL J., BELTON-KOCHER E., GLASNAPP D., POGGIO J.

2006, «The impact of language characteristics in mathematics test items on the performance of English language learners and students with disabilities», *Educational Assessment*, 11(2), pp. 105-126.

SHUM H. Y., CHAN W. W. L.

2020, «Young children's inhibition of keyword heuristic in solving arithmetic word problems», *Behaviour and Brain*, 1(2), pp. 43-48.

SWANSON H. L., COONEY J. B., BROCK S.

1993, «The influence of working memory and classification ability on children's word problem solution», *Journal of Experimental Child Psychology*, 55(3), pp. 374-395.

VAN GARDEREN D.

2007, «Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems», *Journal of learning disabilities*, 40(6), pp. 540-553.

VERSCHAFFEL L.

1994, «Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems», *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), pp. 141-165.

VERSCHAFFEL L., GREER B., DE CORTE E.

2000, *Making sense of word problems*, Lisse, Swets & Zeitlinger.

VERSCHAFFEL L., SCHUKAJLOW S., STAR J., VAN DOOREN W.

2020, «Word problems in mathematics education: A survey», *ZDM*, 52(1), pp. 1-16.

VICENTE S., SÁNCHEZ R., VERSCHAFFEL L.

2020, «Word problem solving approaches in mathematics textbooks: a comparison between Singapore and Spain», *European journal of psychology of education*, 35(3), pp. 567-587.

VILENIUS-TUOHIMAA P. M., AUNOLA K., NURMI J. E.

2008, «The association between mathematical word problems and reading comprehension», *Educational Psychology*, 28(4), pp. 409-426.

WANG A. Y., FUCHS L. S., FUCHS D.

2016, «Cognitive and linguistic predictors of mathematical word problems with and without irrelevant information», *Learning and individual differences*, 52, pp. 79-87.

ZAN R.

2016, *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*, Roma, Carocci Faber.